

THESE
présentées à
LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

pour l'obtention du titre

de DOCTEUR de l'UNIVERSITE

de PARIS

(mention Sciences)

par

Adriana NASTASE

1ère Thèse : "Contribution à l'étude des formes aérodynamiques optimales"

2ème Thèse : "Le problème de Poincaré - Stekloff"

Soutenue le 16 Mars 1970 devant la Commission

composée de :	Président	Roseau M.
		Cabannes H.
Examineurs		Guiraud J.P.
		Euvrard D.

THESE
présentée à
LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

pour l'obtention du titre
de DOCTEUR de l'UNIVERSITE

de PARIS
(mention Sciences)

par
Adriana NASTASE

1ère Thèse : "Contribution à l'étude des formes aérodynamiques optimales"

2ème Thèse : "Le problème de Poincaré - Stekloff"

Soutenue le 16 Mars 1970 devant la Commission

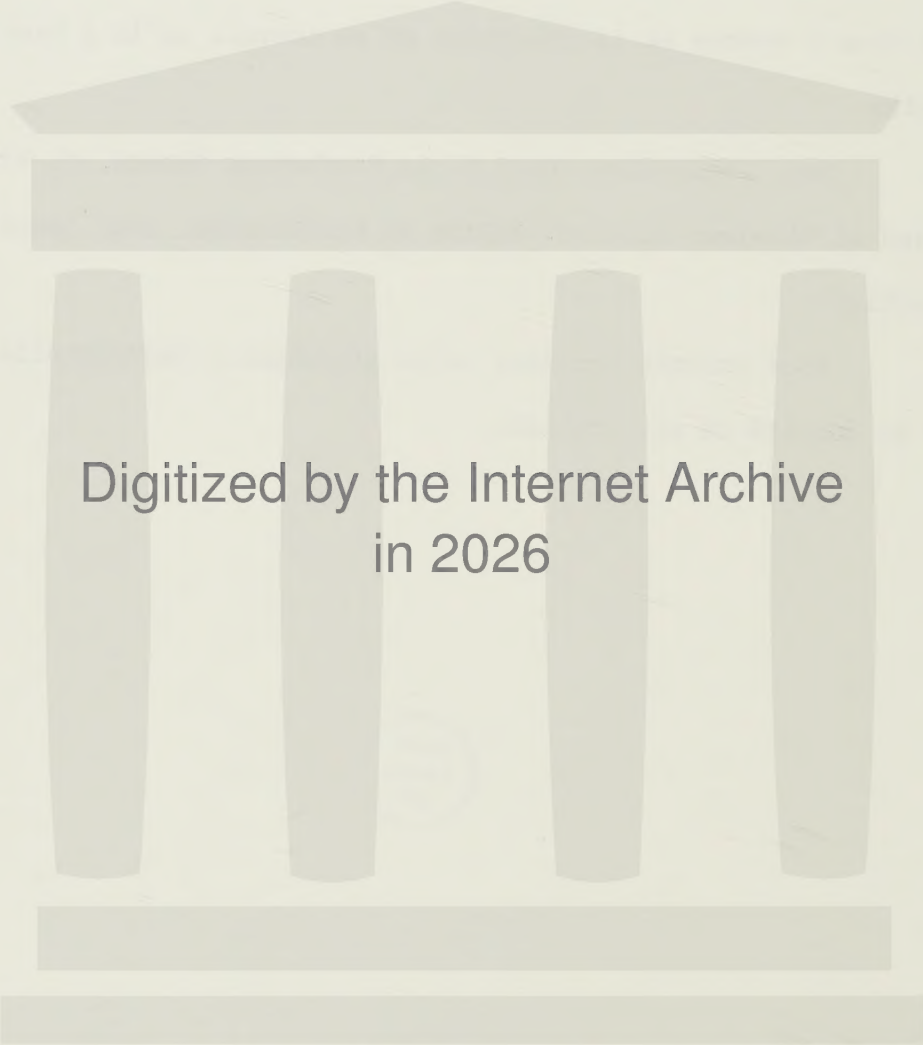
composée de :	Président	Roseau M.
		Cabannes H.
	Examineurs	Guiraud J.P.
		Euvrard D.



Qu'il nous soit permis de témoigner notre reconnaissance à M. le Professeur Henri Cabannes pour l'aide, l'encouragement, les conseils qu'il nous a donnés et la direction de ce travail qu'il a bien voulu accepter.

Nous remercions aussi M. le Professeur Roseau, M. le Professeur Guiraud et Monsieur Euvrard, Maître de Conférences, pour leurs précieuses suggestions.

Nous voulons exprimer notre gratitude à Mademoiselle Delabeye pour la qualité de son travail.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551512_0028

TABLE DES MATIERES

	Pages
Résumé	
Notations	7
<u>Chapitre I</u>	
<u>Introduction</u>	10
1. Considérations générales	10
2. Synthèse des résultats	24
<u>Chapitre II</u>	
<u>L'aile à géométrie variable, optimale pour deux vitesses de croisière supersoniques.</u>	
Résumé	33
1. Introduction	34
2. Le problème variationnel de l'aile delta mince	35
2.1. Considérations générales	35
2.2. Détermination des vitesses axiales de perturbations u pour l'aile delta pliée et dépliée	37
2.3. Le premier problème d'extremum de l'aile delta mince pliée	43
2.4. Le deuxième problème d'extremum de l'aile delta mince dépliée	47
3. Le problème variationnel de l'aile delta à épaisseur symétrique	51
3.1. Considérations générales	51
3.2. Le premier problème d'extremum pour l'aile delta pliée à épaisseur symétrique	55
3.3. Le deuxième problème d'extremum pour l'aile delta à épaisseur symétrique en position dépliée	59
4. Annexes de calcul	63

L'utilisation de la méthode variationnelle pour la détermination de la forme optimale de l'aile cruciforme, en courant supersonique.

Résumé.....	71
1. Considérations générales.....	72
2. La forme optimale de l'aile cruciforme symétrique mince, en courant supersonique.....	74
3. La forme optimale de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique, en courant supersonique.....	85
4. Annexe de calcul.	88

Chapitre IV

Détermination de la forme optimale de l'aile delta munie d'un fuselage conique donné, en courant supersonique.

Résumé.....	112
1. Considérations générales.....	113
2. Calcul des vitesses axiales de perturbation sur l'aile delta munie d'un fuselage conique donné.....	116
3. Expressions des vitesses de perturbation dues au mouvement axial symétrique autour d'un fuselage conique isolé sans incidence.....	128
4. Détermination de la forme optimale d'une aile delta mince munie d'un fuselage conique donné avec incidence.	129
5. Détermination de la forme optimale de l'aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique donné sans incidence.....	132

Contribution à l'étude des formes aérodynamiques optimales.

Contribution to the Study of Optimum Aerodynamic Shapes.

par

by Adriana NASTASE

Résumé

On détermine les formes optimales des surfaces des ailes delta à géométrie variable, des ailes cruciformes et des ailes delta munies d'un fuselage conique, en courant supersonique.

L'étude de chacun de ces chapitres comporte deux étapes distinctes.

La première étape consiste dans la détermination des vitesses axiales de perturbation u pour chacun des systèmes portants considérés.

On utilise à cet effet la méthode de l'analogie hydrodynamique qui permet la détermination des vitesses u qui doivent satisfaire l'équation linéarisée du potentiel (qui est une équation hyperbolique de second ordre) et toutes les conditions aux limites, à l'aide des singularités placées sur les bords d'attaque et sur les arêtes des systèmes portants considérés.

La seconde étape de chaque chapitre concerne la détermination, par une voie variationnelle, des formes des surfaces des systèmes portants considérés de telle sorte que, pour certaines conditions imposées du point de vue géométrique et aérodynamique, ces systèmes présentent une résistance minimale à l'avancement.

Summary

The optimum shapes of the delta wing with variable geometry, the cruciform wings and of the delta wings fitted with a conical fuselage are determined.

The study of each chapter is composed of two distinct stages.

The first stage consists in the determination of the axial disturbance velocity u for each of the lifting system which is considered.

In this way the hydrodynamic analogy method is used. It allowed the determination of the velocities u which satisfy the linearised equation of the potential (which is an hyperbolic equation of second order) and of all the boundary conditions by means of singularities placed along the leading edges and along the ridges of the considered lifting systems.

The second stage of each chapter refers to the determination, by means of a variational method, of the shapes of the surfaces of the considered lifting systems, such that, for some geometrical and aerodynamical conditions, these systems have a minimum drag.

Notations utilisées

x_1, x_2, x_3	Coordonnées d'un point de l'espace d'Euclide reportées à un système d'axes trirectangulaires $Ox_1x_2x_3$
$y = \frac{x_2}{x_1}, z = \frac{x_3}{x_1}$	Coordonnées du plan physique yo_z
$r = \sqrt{y^2 + z^2}$	Rayon polaire du plan physique
$\theta = \arctg \frac{z}{y}$	Angle polaire du plan physique
U_∞	Vitesse du courant non perturbé, suivant l'axe Ox_1
a_∞	Vitesse de la propagation du son dans le courant non perturbé
$M = \frac{U_\infty}{a_\infty}$	Nombre de Mach du courant non perturbé
ϕ	Potentiel de la vitesse de perturbation
$\phi_{n-q-r,q,r}$	$= \frac{\partial^n \phi}{\partial x_1^{n-q-r} \partial x_2^q \partial x_3^r}$, Dérivées d'ordre n du potentiel ϕ
$u = \phi_{100}$	Composantes suivant les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 du vecteur vitesse de perturbation
$v = \phi_{010}$	
$w = \phi_{001}$	
l	Demi-envergure dans le plan physique : - de l'aile delta à géométrie fixe, - de l'aile delta pliée à géométrie variable, - de la plaque P_1 composante d'une aile cruciforme
L	Demi-envergure dans un plan transformé du plan physique : - de l'aile delta munie d'un fuselage conique - de la plaque P_1 de l'aile cruciforme et, respectivement, l'envergure dans le plan physique - de l'aile delta dépliée à géométrie variable.

h	Demi-envergure de la plaque P_2 , composante de l'aile cruciforme, dans le plan physique
H	La même demi-envergure dans un plan transformé du plan physique
c	Le rayon du fuselage conique circulaire dans le plan physique
$C_p = - \frac{2 u}{U_\infty}$	Coefficient de pression
C_l	Coefficient de portance
C_m	Coefficient du moment du tangage
C_d	Coefficient de résistance d'onde
σ	Coefficient de suction
V	Volume de l'aile à épaisseur symétrique
δ_i^j	Symbole de Kroenecker $\begin{cases} \delta_i^j = 0 & i \neq j \\ \delta_i^j = 1 & i = j \end{cases}$
C_n^q	$= \frac{n!}{q!(n-q)!}$ coefficient de la formule du binôme de Newton
$Z(x_1, x_2)$	Equation de l'extrados de l'aile, où de la plaque P_1 composante de l'aile cruciforme
$Y(x_1, x_2)$	Equation de l'extrados de la plaque P_2 composante de l'aile cruciforme
$\lambda^{(1)}, \lambda_i, \mu_i$	Multiplicateurs de Lagrange
$w_{m-k-1, k}$	Coefficients de l'expression polynomiale de la vitesse verticale de perturbation w
$v_{m-k-1, k}$	Coefficients de l'expression polynomiale de la vitesse latérale de perturbation v
H	L'expression de Hamilton

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \begin{array}{l} \text{intégrale elliptique complète} \\ \text{de première espèce} \end{array}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \begin{array}{l} \text{intégrale elliptique complète} \\ \text{de deuxième espèce} \end{array}$$

$$k = \sqrt{1-B_1^2} \quad \begin{array}{l} \text{module des intégrales elliptiques } E(k) \\ \text{et } K(k) \end{array}$$

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \text{les verseurs suivant les axes } Ox_1, Ox_2 \text{ et } Ox_3$$

$$\varphi \quad \text{le potentiel du mouvement}$$

$$\rho \quad \text{la densité}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k}; \text{ l'opérateur de Hamilton}$$

$$\kappa = \text{coefficient isentropique}$$

IntroductionI- 1 Considérations générales

Dans ce paragraphe on passe en revue les principales notions utilisées dans le présent travail.

Ces notions concernent notamment :

- 1) la théorie des petites perturbations et les expressions linéarisées de l'équation du potentiel et de l'expression du coefficient de pression ;
- 2) la théorie des mouvements coniques d'ordre supérieur et les relations de compatibilité dues à P. Germain ;
- 3) la méthode de l'analogie hydrodynamique et son utilisation à la détermination des vitesses axiales des perturbations sur l'aile ;
- 4) l'application d'une méthode variationnelle pour l'étude des formes optimales des systèmes portantes.

1) La théorie des petites perturbations dans les écoulements supersoniques.

On considère que l'écoulement supersonique a les propriétés suivantes :

- a) A cause du fait que le mouvement est très rapide, l'écoulement est isentropique et par conséquent irrotationnel,
- b) le fluide est supposé parfait , (donc on néglige le frottement)
- c) l'écoulement est permanent.

L'équation du mouvement permanent et irrotationnel d'un fluide parfait, avec la supposition que les seules forces extérieures sont des pressions, peut être écrite sous la forme

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

où on a noté par ∇ l'opérateur de Hamilton

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k} \quad (2)$$

et par $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires suivant les axes de coordonnées du système trirectangulaire $Ox_1 \ x_2 \ x_3$. L'équation de continuité devient

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho (\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3)$$

et l'équation d'état du fluide isotropique est de la forme

$$\frac{p}{\rho^K} = \text{const.} \quad (4)$$

Si on élimine la pression p et la densité spécifique ρ entre les équations (1) (3) et (4) on obtient l'équation de la vitesse

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\vec{V}}{2a^2} \cdot \nabla (V^2) \quad (5)$$

Du fait que le mouvement est irrotationnel, elle admet un potentiel de vitesse et donc

$$\vec{V} = \nabla \psi \quad (6)$$

Soit maintenant U_∞ la direction du courant principal suivant l'axe Ox_1 ; si ce courant a des petites perturbations, la vitesse $\vec{V}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{V} = (U_\infty + u) \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (7)$$

où u , v , w sont les composantes de la vitesse de perturbation supposées petites en comparaison avec la vitesse du courant principal U_∞

Si on dénote par Φ le potentiel de la vitesse de perturbation il est lié au potentiel du mouvement ψ suivant la relation

$$\psi = U_\infty x_1 + \Phi \quad (8)$$

Les dérivées d'un certain ordre n du potentiel de la vitesse de perturbation Φ seront désignées par la notation suivante

$$\Phi_{n-q-r,q,r} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x_1^{n-q-r} \partial x_2^q \partial x_3^r} \quad (9)$$

Les composantes de la vitesse axiale de perturbation u , v , et w peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Phi_{100} & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi_{010} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \Phi_{001} \end{aligned} \quad (10)$$

Si on tient compte de (6) et (8) l'équation (5) de la vitesse devient une équation pour le potentiel Φ des vitesses de perturbation. Si dans cette équation on néglige les termes qui ont comme coefficients des produits des composantes de la vitesse de perturbation et si on considère aussi que $a \approx a_\infty$, on obtient l'équation linéarisée du potentiel de la vitesse de perturbation sous la forme :

$$-B^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (11)$$

On peut observer que l'équation est satisfaite par toute dérivée $\Phi_{p,q,r}$ du potentiel Φ .

Par définition le coefficient de pression C_p est de la forme

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (12)$$

si on tient compte de l'équation de l'énergie

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + U_\infty^2 \quad (13)$$

et si on tient compte de l'hypothèse des petites perturbations c'est-à-dire on écrit que :

$$V^2 = (U_\infty + u)^2 + v^2 + w^2 \approx U_\infty^2 + 2u U_\infty \quad (14)$$

et si on tient compte que, dans le mouvement isentropique, la vitesse de propagation du son

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa RT \approx a_\infty^2 \quad (15)$$

alors l'expression linéarisée du coefficient de pression est de la forme suivante

$$C_p = - \frac{2u}{U_\infty} \quad (16)$$

2) La théorie du mouvement conique d'ordre supérieur et l'expression des relations de compatibilité de P. Germain.

On appelle mouvement conique ayant le point O comme sommet, l'écoulement pour lequel toutes ces caractéristiques (c'est-à-dire la pression, la densité et la vitesse) sont constantes le long de chaque rayon vecteur qui part du point O , mais qui peuvent avoir des valeurs différentes quand on passe d'un rayon à l'autre.

Un exemple du mouvement rigoureusement conique est celui autour du cône sans incidence

On s'intéresse particulièrement à l'écoulement autour d'un cône qui a comme courbe génératrice une coupure dans un plan perpendiculaire sur la direction de la vitesse U_∞ et qui représente une aile en mouvement conique.

On appelle mouvement conique d'ordre n le mouvement qui a le potentiel Φ de la vitesse de perturbation exprimée sous la forme d'une

fonction homogène d'ordre n en x_1, x_2, x_3 .

On peut observer que toute dérivée d'ordre n du potentiel Φ est constante sur chaque rayon vecteur issu du point O et forme donc un champ conique proprement dit.

Chaque fonction homogène satisfait l'équation d'homogénéité d'Euler :

$$\begin{aligned} n \Phi &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi \\ &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi \end{aligned} \quad (17)$$

où

$$y = \frac{x_2}{x_1} \quad z = \frac{x_3}{x_1} \quad (18)$$

Si on applique d'une manière successive cette formule à chaque dérivée du Φ on arrive à exprimer le potentiel Φ en fonction de ses dérivées d'ordre n

$$\frac{n!}{x_1^n} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{(n)} \Phi \quad (19)$$

Si on applique maintenant cette relation pour les composantes de la vitesse de perturbation qui sont fonction homogène d'ordre $n-1$ on obtient dans le plan $x_3 = z = 0$ des relations suivantes

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}} u = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q,q,0} \quad (20 \text{ a})$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}} v = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q-1,q+1,0} \quad (20 \text{ b})$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}} w = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q y^q \Phi_{n-q-1,q,1} \quad (20 \text{ c})$$

et dans le plan $x_2 = y = 0$ les relations

$$\frac{(n-1)!u}{x_1^{n-1}} = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^r \Phi_{n-r,0,r} \quad (21 a)$$

$$\frac{(n-1)!v}{x_1^{n-1}} = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^r \Phi_{n-r-1,1,r} \quad (21 b)$$

$$\frac{(n-1)!w}{x_1^{n-1}} = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^r \Phi_{n-r-1,0,r+1} \quad (21 c)$$

Les fonctions $\Phi_{n-q-r,q,r}$ proviennent toutes, par dérivation, d'une même fonction Φ . Elles sont donc liées entre elles par certaines relations différentielles appelées relations de compatibilité.

Ces relations de compatibilité sont écrites dans un plan complexe x qui se déduit en partant du plan physique Oyz , défini par les relations (18) et en faisant certaines transformations géométriques successives.

On considère d'abord le plan de Busemann $O \eta \xi$, obtenu du plan physique par la transformation :

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \quad \theta = \theta \begin{pmatrix} r^2 = y^2 + z^2 \\ \rho^2 = \eta^2 + \xi^2 \\ \theta = \arctg \frac{z}{y} = \arctg \frac{\xi}{\eta} \end{pmatrix}$$

Dans le plan $O \eta \xi$ chaque dérivée d'ordre n , $\Phi_{n-q-r,q,r}$ d'une fonction Φ , homogène d'ordre n , est une fonction harmonique et par conséquent peut être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique de la variable complexe $\zeta = \eta + i \xi = \rho e^{i\theta}$ c'est-à-dire

$$F_{n-q-r,q,r} = \phi_{n-q-r,q,r} + i\phi'_{n-q-r,q,r} \quad (23)$$

et $\phi'_{n-q-r,q,r}$ est la fonction harmonique conjuguée de $\phi_{n-q-r,q,r}$.

Le plan $x = y + i z$ de P. Germain s'obtient du plan de Busemann à l'aide de la transformation conforme suivante :

$$Bx = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \quad \left(\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 x^2}}{Bx} \right) \quad (24)$$

Ce plan a la propriété de reproduire en vraie grandeur tous les segments placés sur l'axe Oy du plan physique. Donc la trace de l'aile, qui est une coupure sur cet axe jouit de cette propriété. La transformation (24) étant conforme la fonction $F_{n-q-r,q,r}$ reste analytique de la variable complexe $x = y + i z$. Dans le cas du mouvement conique proprement dit ($n=1$) les fonctions $F_{n-q-r,q,r}$ sont les vitesses complexes :

$$U(x) = u + i u' \quad V(x) = v + i v' \quad W(x) = w + i w' \quad (25)$$

où u' , v' , w' sont les fonctions harmoniques conjuguées des composantes u , v et w de la vitesse de perturbation.

Les relations de compatibilités entre les fonctions $U(x)$, $V(x)$ et $W(x)$ dans le cas de mouvement conique ($n = 1$) s'obtient en partant des conditions d'irrotationnalité

$$\nabla \cdot \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

Ces relations qui peuvent être écrites, après certains changements de variables, sous la forme

$$dU = -x dV = \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} dW \quad (27)$$

ou encore

$$dF_{100} = -x dF_{010} = \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{001} \quad (28)$$

Les relations de compatibilité, dans le cas du mouvement conique d'ordre n , s'obtiennent en partant de l'observation que les dérivées d'ordre n du potentiel complexe peuvent représenter le potentiel fictif d'un mouvement conique proprement dit. On peut donc écrire d'une manière similaire à (28)

$$dF_{noo} = -x dF_{n-1,10} = \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} dF_{n-1,0,1} \quad (29)$$

Si on écrit une relation similaire pour chaque dérivée d'ordre n , $F_{n-q-r,q,r}$ ($0 \leq q+r \leq n$) et si on multiplie entre eux les premiers, les deuxièmes ainsi que les troisièmes membres des relations ainsi obtenues, on retrouve, après certains calculs simples, les relations de compatibilité dues à P. Germain $|G-1|$, $|G-2|$

$$dF_{noo} = (-x)^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}} \right)^r dF_{n-q-r,q,r} \quad (30)$$

où

$$0 \leq q+r \leq n$$

3) La méthode de l'analogie hydrodynamique et son application à la détermination du champ des vitesses de perturbation pour les mouvements coniques d'ordre supérieur.

Dans le cadre des mouvements coniques d'ordre supérieur on considère que , sur l'aile, la vitesse verticale de perturbation w est exprimée sous la forme d'un polynôme homogène de x_1 et x_2 c'est-à-dire

$$w = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q} x_1^{n-q-1} x_2^q \quad (31)$$

où $w_{n-q-1,q}$ sont des constantes supposées pour le moment arbitraires.

Dans le cadre de la théorie linéarisée la vitesse verticale w est directement liée à la géométrie de l'aile

En effet, sur l'aile la dérivée normale de la vitesse totale doit être nulle, c'est-à-dire

$$\tilde{V} \cdot \tilde{n} = n_1 (U_\infty + u) + n_2 v + n_3 w = 0 \quad (32)$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations u , v et w sont petits en comparaison de la vitesse du courant non-perturbé U_∞ . De même, n_1 et n_2 sont petits et $n_3 \approx 1$, car l'aile est supposée très aplatie. Dans la relation (32) on peut négliger donc les termes de second ordre $n_1 u \approx n_2 v \approx 0$ et, la condition à la limite sur l'aile s'écrit donc sous la forme :

$$w = - U_\infty \frac{\partial Z(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

La recherche de la forme optimale de l'aile conduit donc à la recherche des valeurs optimales des coefficients $w_{n-q-1,q}$ de w .

L'aile optimale, c'est-à-dire l'aile qui présente une résistance minimum à l'avancement, doit être assujettie à remplir certaines conditions

de liaisons de nature géométrique et aérodynamique.

Pour pouvoir exprimer d'une manière explicite la résistance à l'avancement ainsi que les conditions de liaisons de nature aérodynamique, il est donc nécessaire de connaître l'expression de la vitesse axiale de perturbation u sur l'aile proportionnelle au coefficient de pression C_p , selon la relation [16].

Dans le cadre de la théorie linéarisée, on peut séparer l'effet de portance de l'effet de l'épaisseur. L'étude de l'aile triangulaire épaisse portante se ramène donc à l'étude de deux ailes appelées ailes composantes c'est-à-dire :

a) l'aile mince, qui est la surface médiane de l'aile épaisse portante considérée et,

b) l'aile à épaisseur symétrique qui a un plan connu surface médiane et a la même distribution d'épaisseur que l'aile épaisse portante considérée.

Supposons que l'aile triangulaire a les bords d'attaques subsoniques. Sur l'axe Oy du plan complexe $x = y + i z$ l'aile est reproduite en vraie grandeur par la coupure $A_2A_1 [-L_2, L_1]$ (fig. 1) et le cône de Mach par les coupures $D_2I [-\infty, \frac{1}{B}]$ et $D_1I [\frac{1}{B}, +\infty]$.

Soit w_+ et w_- les valeurs de la vitesse verticale de perturbation sur l'extrados et sur l'intrados de l'aile.

Dans le cas de l'aile mince on a sur la coupure A_2A_1 de l'axe Oy :

$$w_+ = w_- \quad (34)$$

et sur les segments D_1A_1 et D_2A_2 , comprises entre l'aile et les coupures

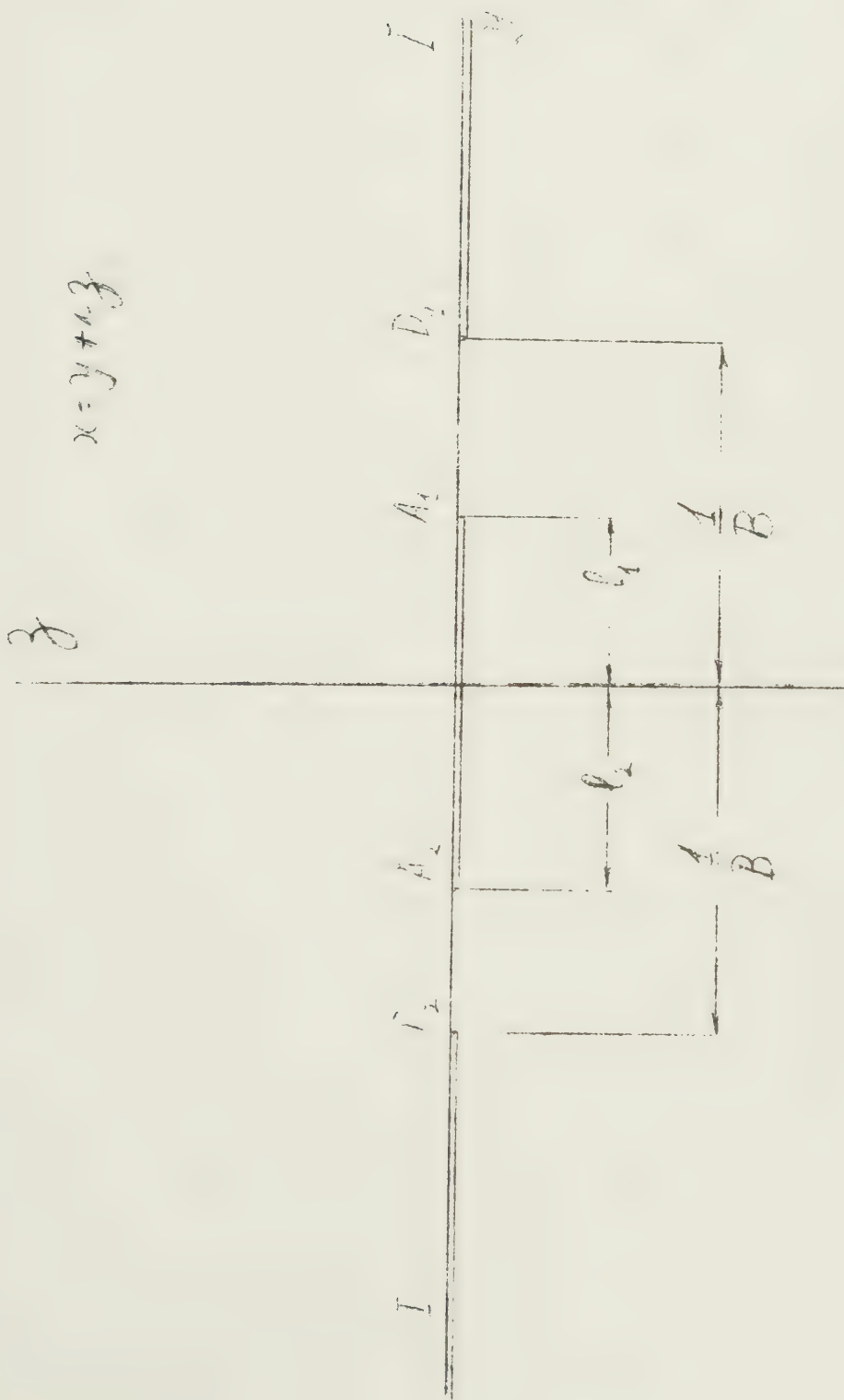


Fig. 1

qui représentent le cône de Mach

$$u = v = 0 \quad (35)$$

Si l'aile est à épaisseur symétrique a lors on a sur l'aile

$$w_+ = -w_- \quad (36)$$

et sur les coupures D_1A_1 et D_2A_2

$$w = 0 \quad (37)$$

Si les ailes composantes (mince ou à épaisseur symétrique) ont les bords d'attaque subsoniques alors le cône de Mach n'est pas perturbé et sur les coupures D_2I et D_1I de l'axe Oy on a :

$$u = v = w = 0 \quad (38)$$

Supposons maintenant que l'un des bords d'attaque OA_1 est supersonique et soit Γ le cercle qui représente la trace du cône de Mach dans le plan physique, et I_1A_1 et A_1I_2 les deux tangentes menées du point extérieur A_1 au cercle Γ . A cause du fait que le bord d'attaque OA_1 est supersonique toute la portion $I_1M_1I_2$ du cercle de Mach est perturbé, (fig. 2).

D'autre part on sait [S-2] que la solution d'une équation hyperbolique trouvée à l'intérieur du cercle de Mach peut être prolongée à l'extérieur de ce cercle de la manière suivante : on considère que sur la tangente au cercle la solution a la même valeur que sur le point du cercle où on mène la tangente.

A cause du fait que sur l'aile entière la vitesse verticale de perturbation w est donnée sur la forme polynomiale (31) il résulte qu'elle conserve cette valeur sur toute la zone S du plan physique, car w est la solution de l'équation hyperbolique (11).

En dehors du cercle Γ et de la zone S le courant n'est pas perturbé et l'on a

$$u = v = w = 0 \quad (38)$$

Si on revient maintenant au plan complexe x on peut montrer que le correspondant de M est D_1 et les points A_1 , I_1 et I_2 coïncident dans le point A_1 ($y = 1_1$) de l'axe Oy de ce plan. Donc sur D_1A_1 on a la représentation polynomiale (31) de w et sur A_1I toutes les composantes des vitesses de perturbation sont nulles.

Le problème de la détermination de la vitesse axiale de perturbation u sur l'aile se ramène, en vertu de la relation (20 a) à la détermination de certaines fonctions bidimensionnelles $\Phi_{n-q,q,0}$ harmoniques dans le plan x défini par la relation (24) et qui doivent satisfaire certaines conditions aux limites sur l'axe Oy de ce plan qu'on est en train de préciser

Ainsi sur la coupure $A_2 A_1$, qui représentent la trace de l'aile, en vertu de (20 c) et de (29) on a

$$d \Phi_{n-q-1,q,1} = 0 \quad (39)$$

Si on tient maintenant compte des relations des compatibilités écrites pour $r = 0$ et $r = 1$ sur la trace de l'aile on a ($d \varphi_{n-q,q,0} + i d \Phi'_{n-q,q,0} = \frac{i y}{\sqrt{1-B^2 y^2}} (d \Phi_{n-q-1,q,1} + i d \Phi'_{n-q-1,q,1})$)

Il résulte donc que sur l'aile on a

$$d \Phi'_{n-q,q,0} = d \Phi_{n-q-1,q,1} = 0 \quad (41)$$

Sur l'axe Oy à l'extérieur de la coupure que représente l'aile mince aux bords d'attaque subsoniques on a $u = 0$, donc

$$\Phi_{n-q,q,0} = 0 \quad (42)$$

Pour l'aile mince aux bords d'attaque supersoniques où pour l'aile à épaisseur symétrique aux bords d'attaque subsoniques ou supersoniques on a sur l'axe Oy , en dehors de la coupure de l'aile $w = 0$, donc

$$\phi_{n-q-1,q,1} = 0 \quad (43)$$

donc, pour les ailes composantes aux bords d'attaque supersoniques (minces ou à épaisseur symétrique) on a :

$$d \phi'_{n-q,q,0} = 0 \quad (44)$$

tandis que pour l'aile à épaisseur symétrique qui a les bords d'attaque subsoniques, on a sur $A_1 D_1$ et $A_2 D_2$ ($|y| < \frac{1}{B}$)

$$d \phi_{n-q,q,0} = 0 \quad (45)$$

et sur les coupures $D_2 I$ et $D_1 I$ de l'axe Oy la relation (44) est remplie.

On peut donc admettre que la fonction analytique de variable complexe $F_{n-q,q,0}$ peut représenter le potentiel d'un écoulement incompressible bidimensionnel fictif qui admet l'aile comme ligne de courant. On peut donc construire ce potentiel par la superposition des contributions des bords d'attaques et de certaines arêtes qui peuvent éventuellement se trouver sur l'aile.

Il reste d'avaliser le comportement du potentiel $F_{n-q,q,0}$ aux proximités des bords d'attaque et des arêtes.

En ce sens on fait l'hypothèse que, dans le cas des mouvements coniques d'ordre supérieur, les vitesses axiales de perturbation u se comportent de la même façon aux proximités des bords d'attaque et des arêtes que la vitesse axiale de perturbation u dans le cas de l'écoulement proprement dit ($n = 1$).

Les fig 3 et 4 . résument les conditions aux limites satisfaites par la vitesse complexe $\mathcal{U} = u + iu'$ et les singularités minima qui assurent les sauts nécessaires de ces vitesses sont données dans le tableau suivant :

TABLEAU I

N°	Nom de l'élément	Données		Nature du vent	Les singularités minima de $\mathcal{U} = u + iu'$
		gauche	droite		
1	Bord d'attaque subsonique OA_2 de l'aile mince ($y = -l_2$) (fig. 3)	$u=v=0$	$w=w_0$ donc $du'=0$	de $u=0$ à $du'=0$	$\frac{k_0}{\sqrt{1_2+y}}$
2	Bord d'attaque supersonique OA_1 de l'aile mince ($y = l_1$) (fig.3)	$w=w_0$ $du'=0$	$u=v=w=0$ donc $du'=0$	$\Delta u'$	$k'_0 \ln (l_1 - y)$
3	Bord d'attaque subsonique OA_2 de l'aile à épaisseur symétrique ($y = -l_2$) (fig.4)	$w=0$ $du'=0$	$w=w_0$ donc $du'=0$	$\Delta u'$	$k''_0 \ln (l_2 + y)$
4	L'arête OC ($y=l_2$) (fig 3) et (fig 4)	$w=w_0$ $du'=0$	$w=w_0$ donc $du'=0$	$\Delta u'$	$k'''_0 \ln (s - y)$
5	Bord d'attaque supersonique OA_1 de l'aile à épaisseur symétrique ($y = l_1$) (fig.4)	$w=w_0$ $du'=0$	$u=v=w=0$ donc $du'=0$	$\Delta u'$	$k_0 \ln (l_1 - y)$

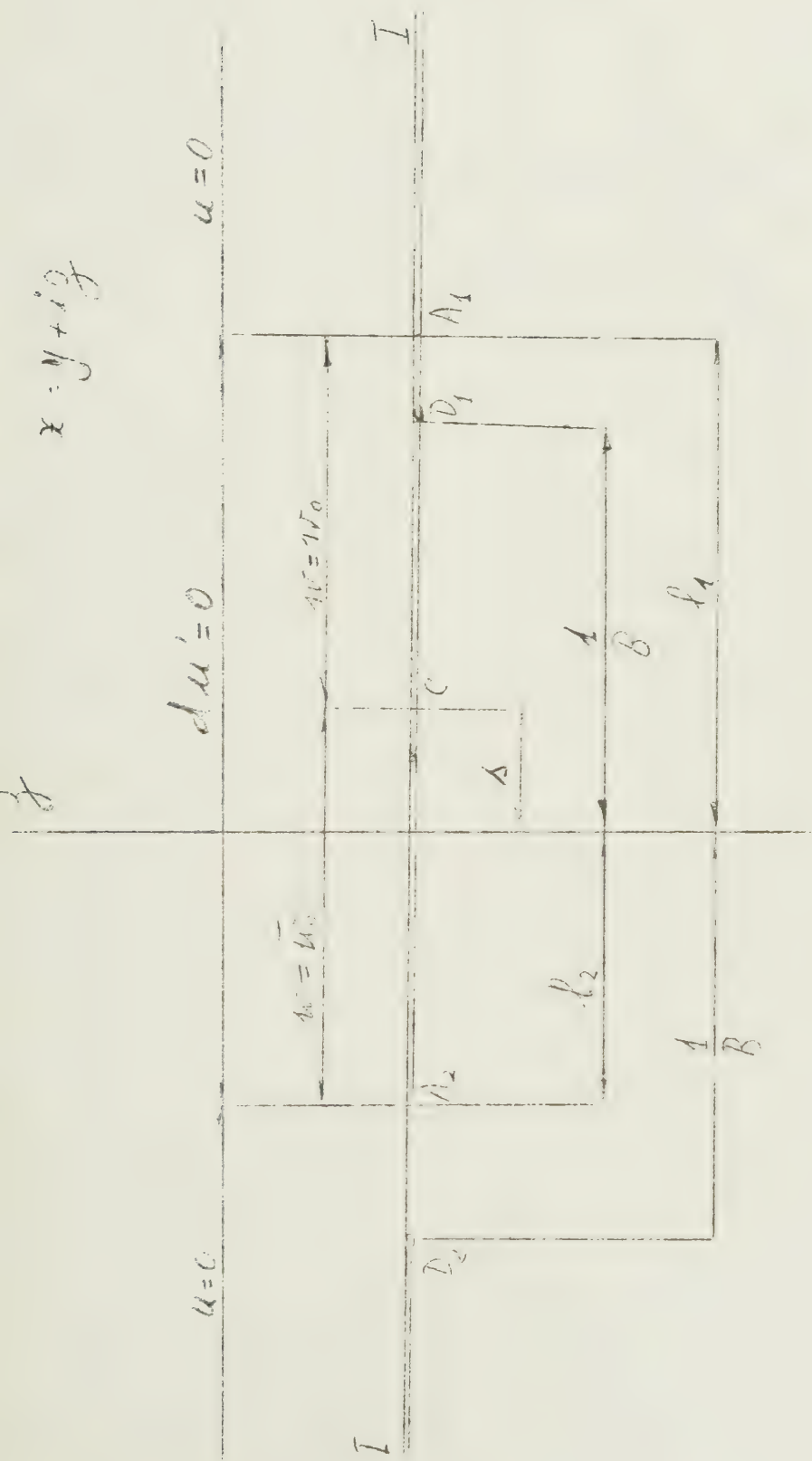


Fig. 3

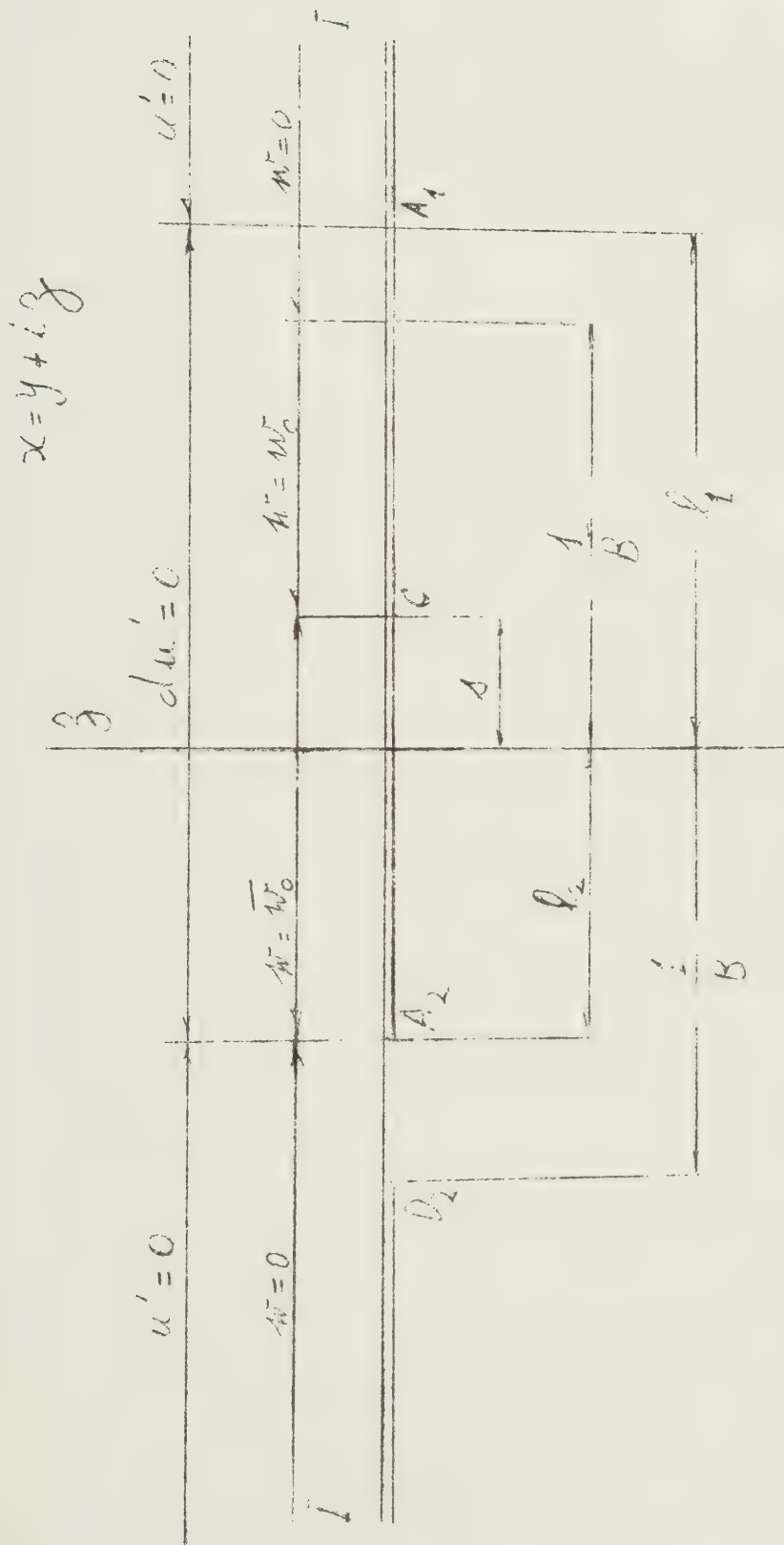


Fig. 4

Par conséquent, si la vitesse axiale de perturbation u de l'écoulement conique d'ordre supérieur doit avoir le même comportement dans la proximité des bords d'attaque et des arêtes, alors la dérivée d'ordre, n $F_{n-q,q,0}$ contient, outre ces singularités leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$, c'est-à-dire des multipôles. Si on considère maintenant le plan auxiliaire

$$\chi^2 = \frac{l_1 - x}{l_2 + x} \quad (46)$$

qui a la propriété d'admettre l'abscisse comme ligne de courant et l'ordonnée comme ligne potentiel, alors dans ce plan les conditions aux limites peuvent être plus facilement satisfaites.

Si on revient maintenant au plan x , on tient compte de la formule (20 a) et on exclut les singularités d'ordre supérieur à celles indiquées dans le tableau I ; on obtient, après certains calculs, les contributions suivantes dans l'expression de u :

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{l_1 - x}{l_2 + x}} \sum_{q=0}^{n-1} A_{nq} x^q \quad (47)$$

pour le bord d'attaque subsonique OA_2 de l'aile mince et pour la contribution d'une arête ($s_1 > 0$) située sur une aile mince aux bords d'attaque subsoniques :

$$\begin{aligned} \frac{u}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re} & \left[\sum_{q=0}^{n-1} C_{nq} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_2 + s_1)(l_1 - x)}{(l_1 + l_2)(s_1 - x)}} + \right. \\ & \left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_{nq} x^q \sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)} \right] \quad (48) \end{aligned}$$

Une exposition plus détaillée de ce paragraphe peut être trouvée dans

$$[C - 4] \quad [C - 7 - I - 3] \quad \text{et} \quad [C - 17 - M - 3 - N - 16]$$

4) L'utilisation d'une méthode variationnelle pour la détermination des formes optimales des systèmes portants

La recherche de la forme optimale de la surface d'un système portant se réduit à la détermination du champ des vitesses de perturbation u (u, w) de telle sorte que la fonctionnelle

$$= k \int_S u w dS = \int_S F dS = C_D \quad (49)$$

qui représente la résistance à l'avancement du système portant, doit être extrémale. Le système portant doit satisfaire aussi une série des conditions de liaison de nature géométrique (continuité de la côte de la surface à travers une arête latérale, les conditions de l'annulation de l'épaisseur de l'aile le long de ses bords d'attaque et de fuite, la condition que le volume de l'aile soit donné etc...), qui dans la théorie linéarisée sont fonction de w

$$E_i \equiv f_i(w) = 0 \quad (50)$$

et une série de conditions de nature aérodynamiques (portance et moment de tangage donnés, condition d'adaptation le long des bords d'attaque subsoniques de l'aile mince etc...) qui sont fonction de u de la forme

$$K_i = C_i \int_S u x_1^i dS \quad (51)$$

Dans les relations (49) et (51) on a noté par S la projection du système portant sur son plan d'aplatissement.

Ce problème d'extremum avec liaison est d'un aspect identique avec le problème isopérimétrique. Et l'on sait, que, dans le cas du problème isopérimétrique, et par conséquent aussi pour les problèmes d'extrema qu'on étudie ici, les multiplicateurs de Lagrange sont des constantes.

Maintenant on va supposer que la vitesse verticale de perturbation w est donnée sous la forme d'une superposition de certains polynômes homogènes c'est-à-dire :

$$w = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} y^k \quad (52)$$

Pour cette vitesse verticale de perturbation w , il résulte l'expression de la vitesse axiale de perturbation u , déduite à l'aide de la méthode de l'analogie hydrodynamique par la superposition des contributions des bords d'attaque et des arêtes du système portant.

Les coefficients de la vitesse axiale de perturbation u sont liés aux coefficients de la vitesse verticale de perturbation w par des relations linéaires et homogènes déduites en partant des relations de compatibilité de P. Germain.

On peut donc écrire pour un coefficient quelconque de la vitesse axiale de perturbation, une relation de la forme :

$$A_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (53)$$

où $a_{qj}^{(n)}$ sont fonction de la projection dans le plan de l'aile (donc de l'envergure $2l$) et du nombre Mach M de croisière. Par conséquent pour une projection dans le plan donné et pour un régime de croisière imposé d'avance les coefficients $a_{qj}^{(n)}$ sont donc des constantes dans les problèmes d'extrema

considérés. Par conséquent, la résolution de ces problèmes d'extrema reviennent à la détermination des valeurs optimales des coefficients $w_{m-k-1,k}$ de la vitesse verticale w .

Dans le cadre de la théorie perturbation, la fonctionnelle se réduit à une forme quadratique par rapport aux coefficients de w , et les relations de liaison (géométriques ou aérodynamiques) ont un caractère linéaire par rapport à ces coefficients.

Par conséquent, si on calcule la première variation de l'expression de Hamilton, on sépare les variations des coefficients $w_{\theta \sigma}$ de w et on annule les coefficients de ces variations, on obtient certaines équations algébriques linéaires, qui, réunies aux relations linéaires de liaison forment un système linéaire des équations algébriques qui détermine, d'une manière univoque, les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w , ainsi que les valeurs des multiplicateurs χ_1 des problèmes d'extrema proposés.

I-2. Synthèse des résultats

Le but principal de l'étude de l'écoulement autour d'un système portant concerne la détermination de la forme de sa surface de telle sorte que, pour certaines conditions imposées du point de vue géométrique et aérodynamique, le système portant considéré présente une résistance minimum à l'avancement.

On considère seulement les ailes qui ont des distributions d'incidences et de pentes suffisamment petites par rapport au courant principal de telle sorte qu'elles peuvent être considérées comme très aplaties et peuvent être étudiées dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Conformément à cette théorie, le coefficient de pression C_p est proportionnel à la vitesse axiale de perturbation u .

La vitesse perpendiculaire sur le plan d'aplatissement du système portant sera exprimée sur cette surface sous la forme d'une superposition finie des polynômes homogènes. On peut ainsi appliquer les résultats de la théorie des mouvements coniques d'ordre supérieur, établie par P. Germain [G - 1]. On considère les vitesses axiales de perturbation déduites à l'aide de la méthode de l'analogie hydrodynamique, méthode qui permet la résolution de l'équation linéarisée du potentiel et de toutes les conditions à la limite, à l'aide des singularités placées sur certaines lignes qui passent par l'apex de l'aile (bords d'attaque et arrêts).

Dans l'étude de tous les problèmes d'optimisation considérés dans le présent travail, on a utilisé la méthode variationnelle qui a donné aupa-

ravant / N - 1 / des résultats utilisables du point de vue pratique.

On a considéré que le fluide est parfait (sans friction). Malgré le fait que le coefficient de friction ait une valeur assez importante, il peut être négligé dans les méthodes variationnelles car certaines études effectuées dans la couche limite ont montré que, dans la première approximation, le coefficient de friction peut être supposé constant par rapport aux petites modification de forme de la surface du système portant. / S - 2 /

Pour avoir la résistance à l'avancement minimale totale, on doit ajouter à la résistance d'onde minimale qu'on trouve dans ce travail, la valeur constante du coefficient de friction.

On a divisé l'étude dans quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on passe rapidement en revue les fondements théoriques, les principaux résultats obtenus et les notations utilisées.

Les chapitres II, III, IV représentent des extensions des résultats obtenus auparavant / N - 1 / pour le problème de l'optimisation des ailes delta isolées, aux systèmes portants plus compliqués du point de vue géométrique c'est-à-dire :

- a) l'aile à géométrie variable ;
- b) l'aile cruciforme symétrique ;
- c) l'aile delta munie d'un fuselage conique circulaire.

Dans le second chapitre, on étudie l'aile delta épaisse portante à géométrie variable, qui doit être optimale à deux régimes de croisière supersoniques. On veut donc déterminer la forme de la surface de l'aile delta à géométrie variable de telle sorte que, lorsqu'elle est complètement pliée avec une envergure donnée $2l$, l'aile ait la résistance à l'avancement minimale pour le premier nombre de croisière M , et lorsqu'elle est complètement dépliée avec une envergure donnée $2L > 2l$, l'aile ait

la résistance à l'évancement minimale pour le second nombre de Mach de croisière $M_1 < M$.

Pour l'aile épaisse portante à géométrie variable, sont données : les projections dans le plan, les volumes, les portances, les moments de tangage, les conditions d'adaptation de l'aile sur ces bords d'attaque (c'est-à-dire la vitesse axiale de perturbation u doit s'annuler le long des bords d'attaque subsonique, afin d'éviter, aux deux vitesses de croisière, la formation des nappes de tourbillons en cornet) et l'épaisseur de l'aile doit être nulle le long des bords d'attaque et de fuite de l'aile en positions pliée et dépliée ; de même on suppose que le profil central de l'aile est donné. Pour la généralité, on a inclu aussi la succion dans le calcul de résistance à l'avancement de l'aile. On suppose aussi que l'aile delta pliée est munie de deux charnières OA_1'' et OA_2'' assez proches des bords d'attaque OA_1 et respectivement OA_2 . La partie de l'aile pliée extérieure à ces charnières doit s'escamoter afin de pouvoir permettre la sortie de la surface additionnelle de l'aile dépliée par rapport à l'aile pliée. Le long de ces charnières, la surface de l'aile pliée doit se raccorder à la surface de l'aile dépliée.

Parce que la résistance d'interférence, entre deux ailes triangulaires ayant les mêmes projections dans le plan d'aplatissement dont une est mince et l'autre à épaisseur symétrique, est nulle (la projection dans le plan pouvant être fixe ou variable) on peut, dans le cas de l'aile épaisse portante à géométrie variable, séparer aussi, du point de vue théorique, l'effet de l'épaisseur de l'effet de la portance. On est conduit ainsi à étudier deux problèmes d'extrema plus simples concernant les ailes delta à géométrie variable mince et à épaisseur symétrique, compo-

santes de l'aile épaisse portante considérée, c'est-à-dire :

- l'aile mince est considérée donc comme la surface médiane (ou le squelette) de l'aile épaisse portante ;
- l'aile à épaisseur symétrique a un plan comme surface médiane et a la même distribution d'épaisseur que l'aile épaisse portante considérée.

L'aile composante mince est traitée d'une manière unitaire en deux hypothèses de calcul, c'est-à-dire :

- l'hypothèse classique, valable à très petites incidences, selon laquelle on néglige l'apparition des nappes de tourbillons en cornet et on inclut dans l'expression de la résistance à l'avancement, les forces de succion qui apparaissent sur les bords d'attaque subsoniques de l'aile mince ;
- la nouvelle hypothèse selon laquelle l'aile est adaptée sur les bords d'attaque subsoniques aux deux nombres de croisière M_1 et M . Donc, à ces nombres Mach de croisière l'effet de contournement ne se produit pas et par conséquent ni la succion ni la formation des nappes de tourbillon en cornet, qui sont les effets de ce contournement, ne se produisent pas.
- On peut se retrouver dans le cadre de l'une de ces hypothèses si dans l'étude unitaire effectuée on néglige soit les conditions de l'adaptation sur les bords d'attaque subsonique (pour la première hypothèse) soit les forces de succion (pour la seconde hypothèse).

Soit w et $\bar{w}$ les deux distributions des vitesses verticales de perturbation sur l'aile pliée et respectivement sur la surface additionnelle de l'aile dépliée (par rapport à l'aile pliée), exprimées chacune sous la forme de certaines superpositions finies des polynômes homogènes avec coefficients arbitraires.

L'application de la méthode variationnelle pour la détermination

des surfaces optimales des ailes composantes à géométrie variable (mince ou à épaisseur symétrique) conduit à la résolution de certains systèmes linéaires algébriques finis qui déterminent les valeurs optimales des coefficients de w et $\bar{w}$.

Le chapitre III concerne l'étude de l'aile cruciforme épaisse portante symétrique par rapport aux deux planes orthogonales d'aplatissement des deux plaques qui composent cette aile cruciforme. On montre que dans le problème de la détermination de la vitesse axiale de perturbation u sur l'aile cruciforme on peut aussi séparer l'effet de la courbure de l'effet de l'épaisseur.

Pour les ailes cruciformes symétriques (minces ou à épaisseur symétrique) la vitesse axiale de perturbation peut être obtenue par la superposition de deux vitesses de perturbation : une dénommée "propre" qui est identique à celle obtenue auparavant autour de la plaque (P_1) considérée comme isolée et l'autre dénommée "induite" qui représente l'effet sur la plaque (P_1) due à l'écoulement autour de la plaque (P_2) considérée comme isolée. Le calcul de cette vitesse induite représente ainsi une contribution originale de ce travail.

Au commencement, on considère séparément les problèmes d'optimisation des ailes cruciformes symétriques minces de ceux à épaisseur symétrique.

Pour l'aile cruciforme mince, sont donnés : les projections des deux plaques composantes sur deux planes perpendiculaires (sous la forme de deux triangles isocèles) la portance, le mouvement de tangage et les conditions d'adaptation sur ses quatre bords d'attaque subsoniques.

On traite le problème d'un point de vue unitaire en deux hypothèses de calcul sous-mentionnées :

Pour l'aile cruciforme à épaisseur symétrique , sont donnés : les projections des deux plaques composantes sur deux planes perpendiculaires (aussi sur la forme de deux triangles isocèles) le volume de l'aile, les conditions que l'aile cruciforme soit d'épaisseur nulle sur ses bords d'attaque et de fuite.

Quand on traite séparément les problèmes d'optimisation des ailes cruciformes composantes (mince et à épaisseur symétrique) on constate que, dans le cas de l'optimisation de l'aile cruciforme symétrique mince les vitesses induites ne jouent aucun rôle ni dans le calcul des caractéristiques aérodynamiques ni dans l'effet de contournement des bords d'attaque subsoniques de l'aile mince.

Dans le problème d'optimisation de l'aile cruciforme symétrique mince il faut donc considérer seulement les vitesses axiales propres.

Par contre si on étudie le problème de l'optimisation de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique, on doit, dans l'expression de la traînée, prendre en considération la vitesse axiale "induite" à côté de la vitesse axiale "propre".

Si on considère les vitesses de perturbations w et v perpendiculaires sur les planes d'aplatissement des plaques composantes de l'aile cruciforme (mince ou à épaisseur symétrique) exprimées chacune sous la forme d'une superposition de polynômes homogènes en x_1 et x_2 et respectivement en x_1 et x_3 et si on applique la méthode variationnelle on obtient des systèmes algébriques finis d'équations linéaires qui donnent les valeurs optimales des coefficients des distributions de w et de v .

Si dans ces systèmes finals on annule la contribution d'une plaque (P_2) de l'aile cruciforme, on retrouve les systèmes déjà considérés qui donnent les valeurs optimales pour les coefficients de w dans le cas de l'aile delta, mince et respectivement à épaisseur symétrique.

Ce qui est encore plus intéressant c'est le fait que, les systèmes qui donnent les valeurs optimales des coefficients des vitesses w et v sur les ailes cruciformes (mince ou à épaisseur symétrique) peuvent être obtenus, du point de vue formel, en remplaçant les coefficients de $\bar{w}$ avec les coefficients de v dans les systèmes donnés auparavant [11.-1], et qu'ils fournissent les valeurs optimales des coefficients sur une aile delta isolée, mince ou à épaisseur symétrique, pourvue d'une arête centrale de séparation de deux distributions des vitesses verticales de perturbation w et $\bar{w}$.

Si on veut maintenant obtenir l'aile cruciforme symétrique épaisse portante optimale, on doit prendre comme squelette, l'aile cruciforme symétrique mince optimale trouvée auparavant et comme distribution d'épaisseur celle qui correspond à une aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique optimale mais "modifiée".

La modification concerne la vitesse axiale de perturbation qu'on introduit dans l'expression de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique.

Elle doit contenir aussi, outre la vitesse axiale de perturbation totale due à l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique, la vitesse axiale induite, sur les plaques de l'aile cruciforme symétrique mince.

Le quatrième chapitre concerne la détermination de la forme optimale de l'aile delta épaisse portante munie d'un fuselage conique donné. Le problème de la détermination de la vitesse axiale de perturbation sur l'aile delta épaisse portante munie d'un fuselage conique avec incidence peut être résolu par la superposition des vitesses axiales de perturbations obtenues en considérant des écoulements autour de trois systèmes plus simples, c'est-à-dire :

- L'aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence.
- L'aile delta épaisse portante munie d'un fuselage conique sans incidence.
- Mouvement axial symétrique autour du fuselage conique isolé sans incidence.

Le troisième écoulement est classique. Il peut être étudié séparément. Si pour les deux premiers écoulements, on considère les vitesses verticales de perturbations exprimées sur l'aile sur la forme de la superposition de certains polynômes homogènes, on peut réduire l'étude de ces problèmes à la détermination d'un potentiel fictif bidimensionnel tel que l'on a montré dans / C.-17/ et / C.-18/. Si on détermine, suivant cette méthode ce potentiel fictif, on peut, à l'aide des conditions de compatibilité de P. Germain, déduire les expressions des vitesses axiales de perturbations sur l'ensemble aile-fuselage. On a ensuite à résoudre deux problèmes d'extrema : l'un concernant l'aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence et l'autre l'aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique sans incidence.

Pour l'aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence, sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, l'incidence du fuselage, la portance, le moment de tangage et les condi-

tions d'annulation de la vitesse axiale de perturbation le long des bords d'attaque subsoniques (pour éviter les nappes de tourbillons en cornets). Pour l'aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique sans incidence, sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, le volume de l'aile et les conditions de l'annulation de l'épaisseur de l'aile sur les bords d'attaque et de fuite. Chacun de ces problèmes d'extrema conduit aussi à la résolution d'un système algébrique fini d'équations algébriques linéaires qui donne les valeurs optimales des coefficients des vitesses verticales de perturbation w sur chacune des ailes considérées ainsi que les valeurs des multiplicateurs de Lagrange qui intervient dans ces problèmes d'extrema.

L'aile à géométrie variable, optimale pour deux
vitesses de croisière supersoniques

R é s u m é

On détermine la forme de la surface d'une aile épaisse portante à géométrie variable qui a la résistance minimale pour deux vitesses de croisière données. Dans le cadre de la théorie linéarisée qu'on utilise, on peut séparer l'effet de l'épaisseur et l'effet de portance. On est conduit ainsi à résoudre deux problèmes variationnels plus simples concernant les ailes delta associées, c'est-à-dire l'aile mince et l'aile à épaisseur symétrique.

Chacun de ces deux problèmes variationnels conduit à deux problèmes d'extrema en cascade :

- Le premier problème d'extremum concerne la détermination de la surface de l'aile delta fermée (mince ou à épaisseur symétrique) qui a une envergure donnée $2l$ et qui doit être de résistance minimale pour un nombre Mach de croisière M ;

- Le second problème d'extremum qui consiste dans la détermination de la surface additionnelle de l'aile ouverte (par rapport à l'aile fermée) ainsi que l'entière aile ouverte d'envergure $2L > 2l$ (mince ou à épaisseur symétrique) soit de résistance minimum pour le second nombre Mach de croisière $M_1 < M$. Dans le second problème d'extremum la partie centrale de l'aile (c'est-à-dire la surface de l'aile fermée) est supposée connue et donnée par le premier problème d'extremum.

II. 1. Introduction

L'aile à géométrie variable qu'on étudie dans le présent travail est d'une grande importance pour l'aviation supersonique moderne. Les ailes à géométrie variable présentent une série d'avantages par rapport aux ailes qui ont une forme en plan invariable dont les plus importants sont les suivants :

- a) elles nécessitent une piste de décollage et d'atterrissage plus courte ;
- b) la vitesse d'atterrissage peut être plus petite ;
- c) la capacité portante de l'aile est accrue ;
- d) on peut contrôler l'accélération et l'effet thermique quand on entre ou sort de l'atmosphère dense.

Les ailes à géométrie variable optimales pour deux vitesses de croisière supersoniques sont conçues spécialement pour l'entrée ou la sortie de l'atmosphère dense.

Dans le cadre de la théorie linéarisée on peut séparer l'effet de l'épaisseur de l'effet de portance pour l'aile pliée ainsi que pour l'aile dépliée.

Le problème variationnel de la détermination de la surface de l'aile épaisse portante à géométrie variable qui doit être optimale pour deux nombres Mach de croisière, se décompose en deux autres problèmes variationnels plus simples pour les ailes composantes c'est-à-dire :

- a) l'aile mince qui représente la surface médiane de l'aile épaisse portante considérée ;
- b) l'aile à épaisseur symétrique qui a un plan comme surface médiane

et qui a la même distribution d'épaisseur que l'aile épaisse portante considérée. A son tour chacun des deux problèmes variationnels des ailes composantes, minces ou à épaisseur symétrique, conduit à la résolution de deux problèmes d'extrema en cascade, pour les ailes delta pliées et dépliées.

a) Le premier problème d'extremum concernant la recherche de la forme de la surface de l'aile delta pliée (mince ou à épaisseur symétrique) qui a une projection dans le plan donné (donc une envergure $2l$ donnée) et qui doit être de résistance minimum pour le premier nombre Mach de croisière M fig (1a,b) et fig (3a,b).

b) Le second problème d'extremum concernant la recherche de la forme de la surface additionnelle S (dans toutes les photos hachurées) de l'aile delta dépliée (mince ou à épaisseur symétrique) par rapport à l'aile delta pliée, ainsi que l'aile dépliée toute entière d'envergure donnée $2L > 2l$ soit de résistance minimum pour le second nombre Mach de croisière $M_1 < M$ fig (2a,b,c) et fig (4a, b, c).

La partie centrale de la surface de l'aile dépliée (c'est-à-dire la surface de l'aile pliée) est supposée connue et elle est donnée par le premier problème d'extremum concernant l'aile pliée.

Comme on verra plus loin chacun de ces quatre problèmes d'extrema doit satisfaire une série de relations de liaison de nature géométrique ou aérodynamique qui seront explicitées par la suite. On étudie d'abord le problème variationnel de l'aile delta composante mince.

II.2 Le problème variationnel de l'aile delta mince

II.2.1. Considérations générales.

Ce problème variationnel conduit aux suivants problèmes d'extrema en cascade qu'on vient d'explicitier.

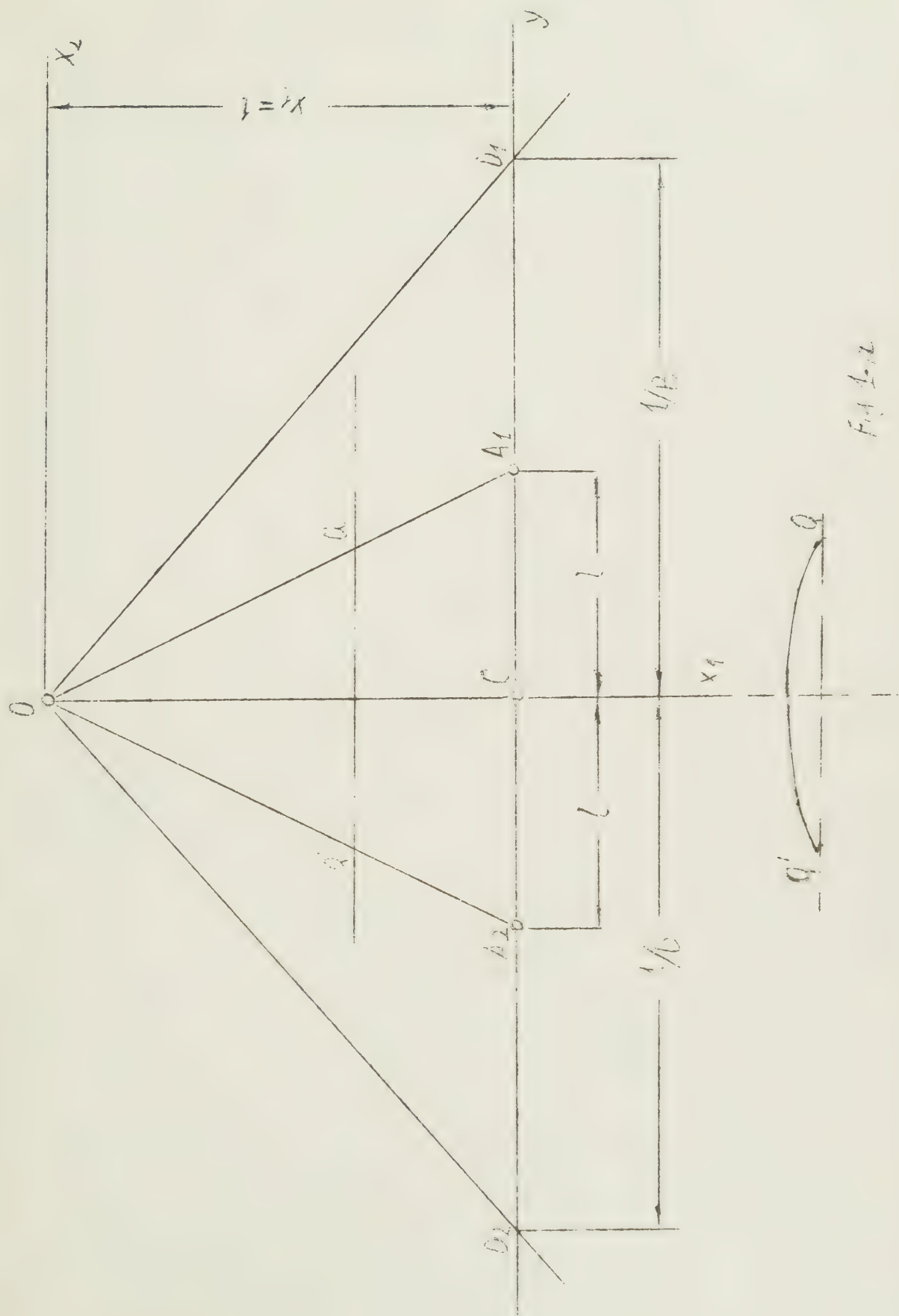
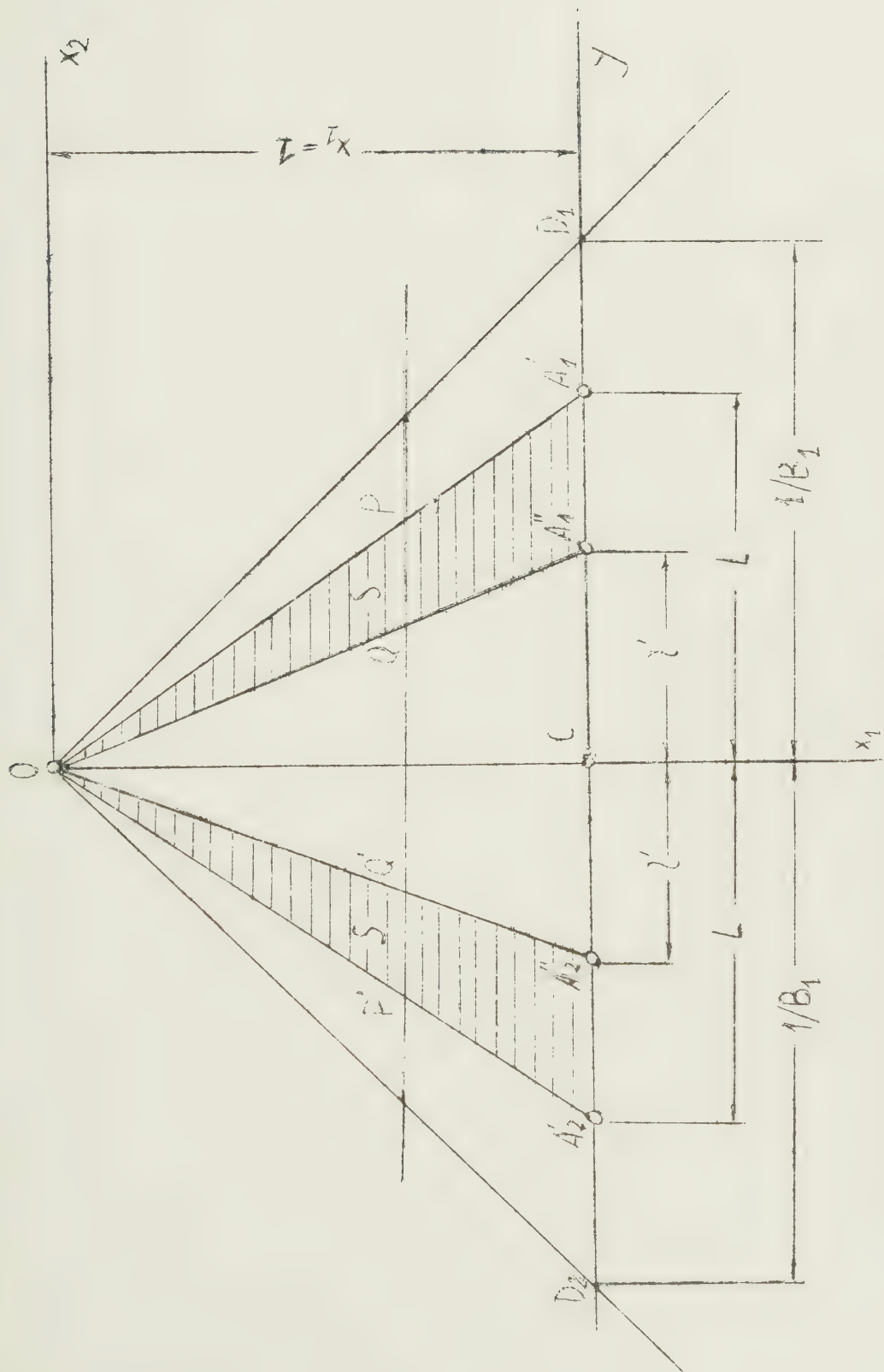
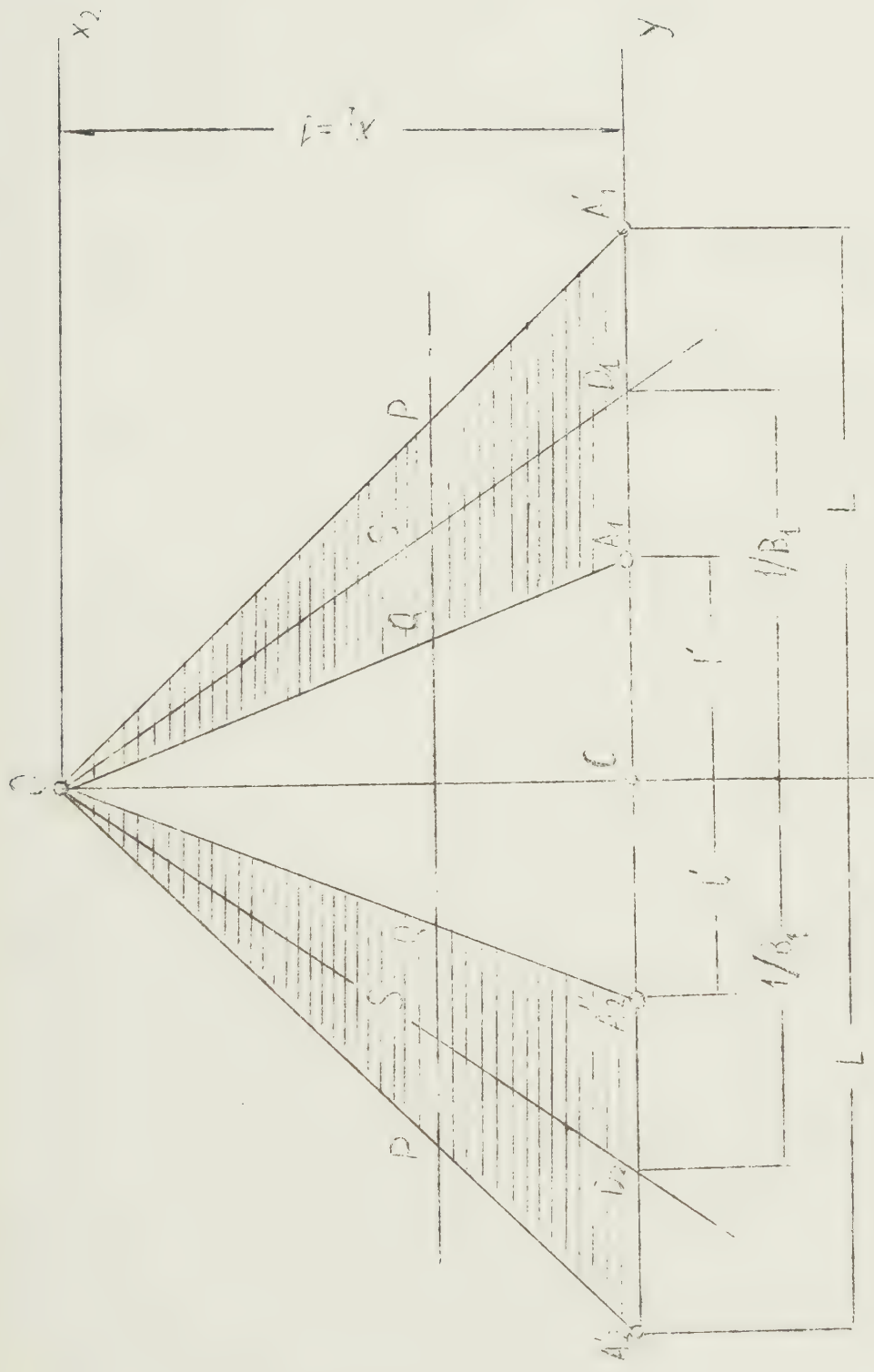
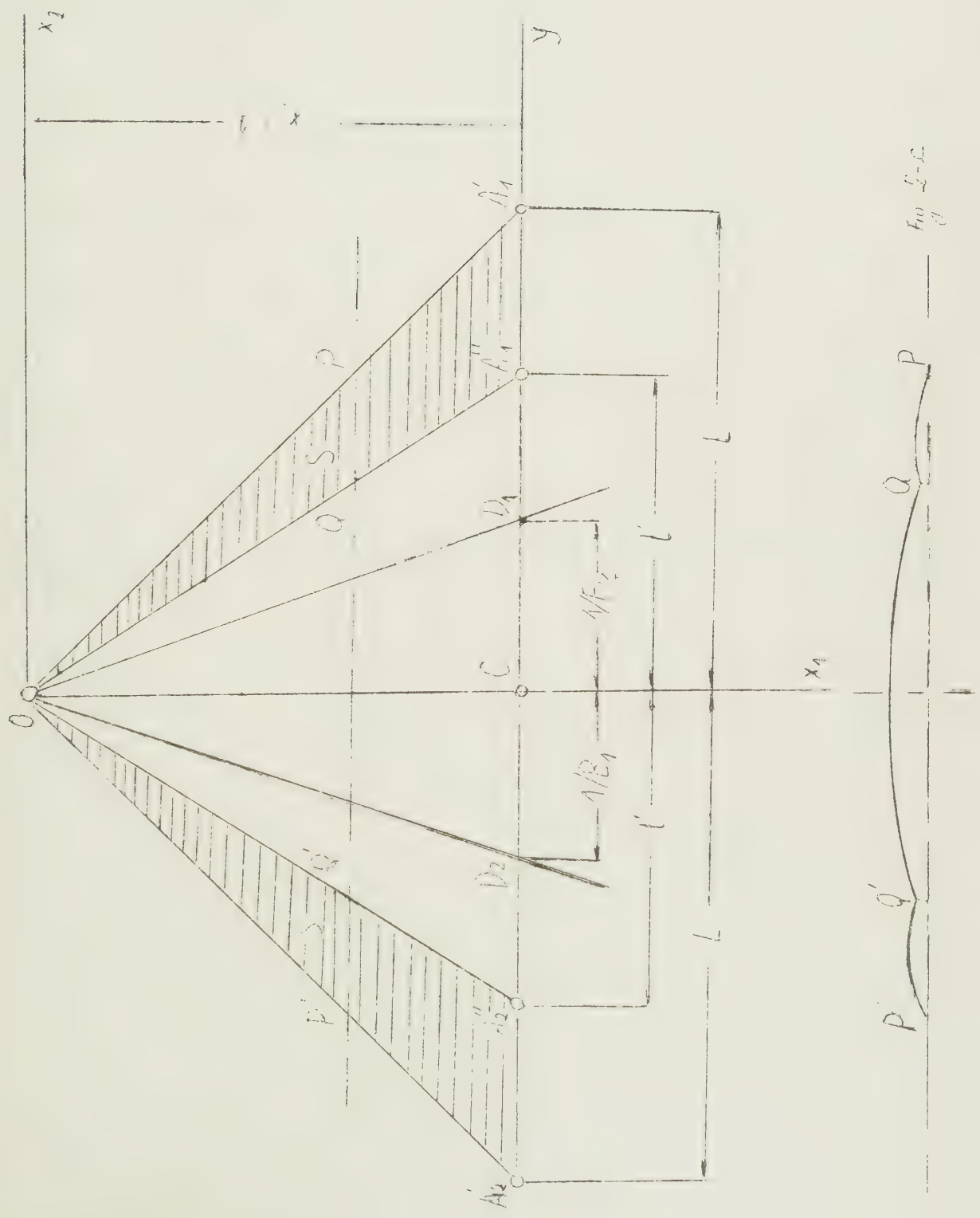


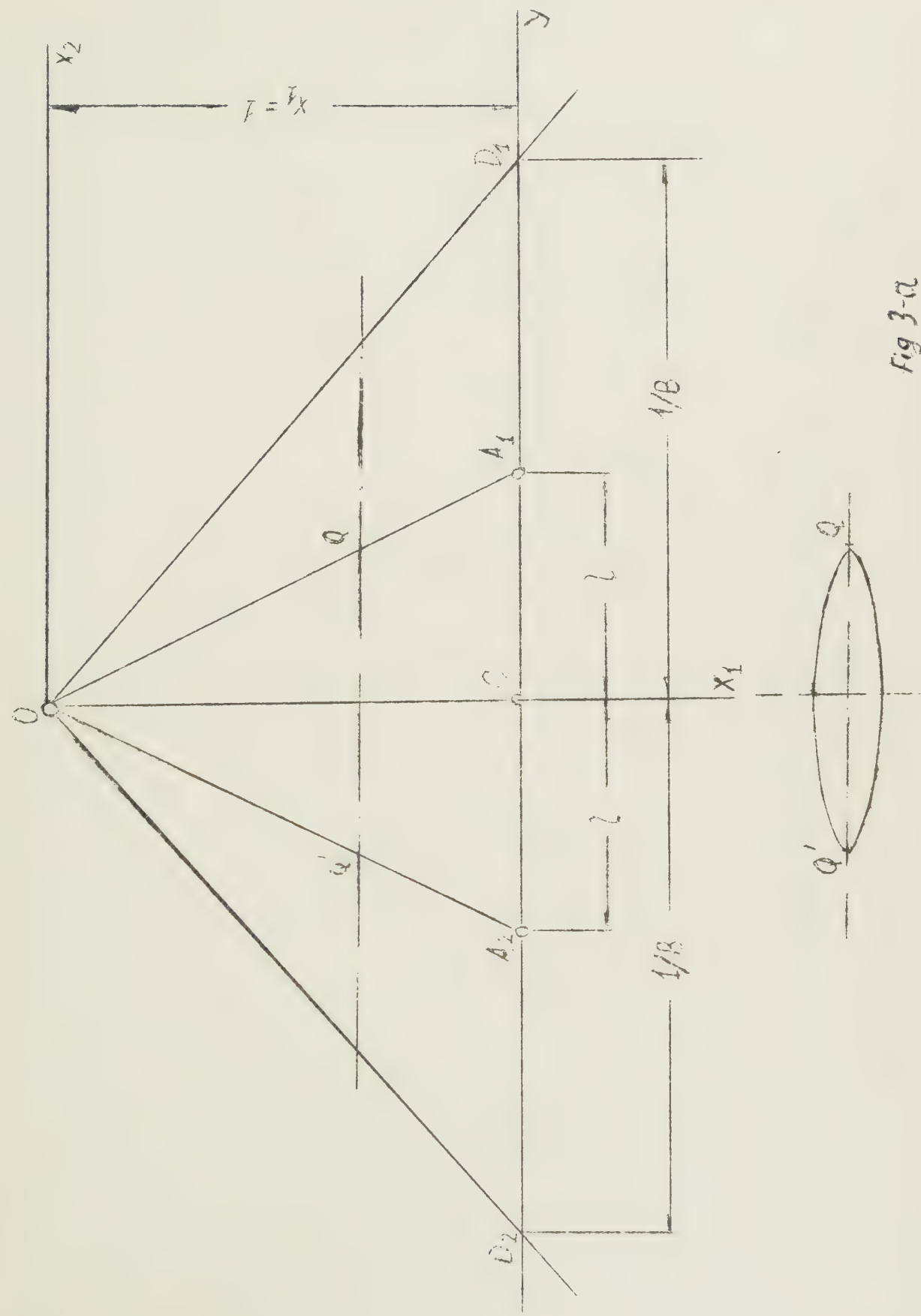
Fig. 1-1







$f_{10} \frac{L}{d}$



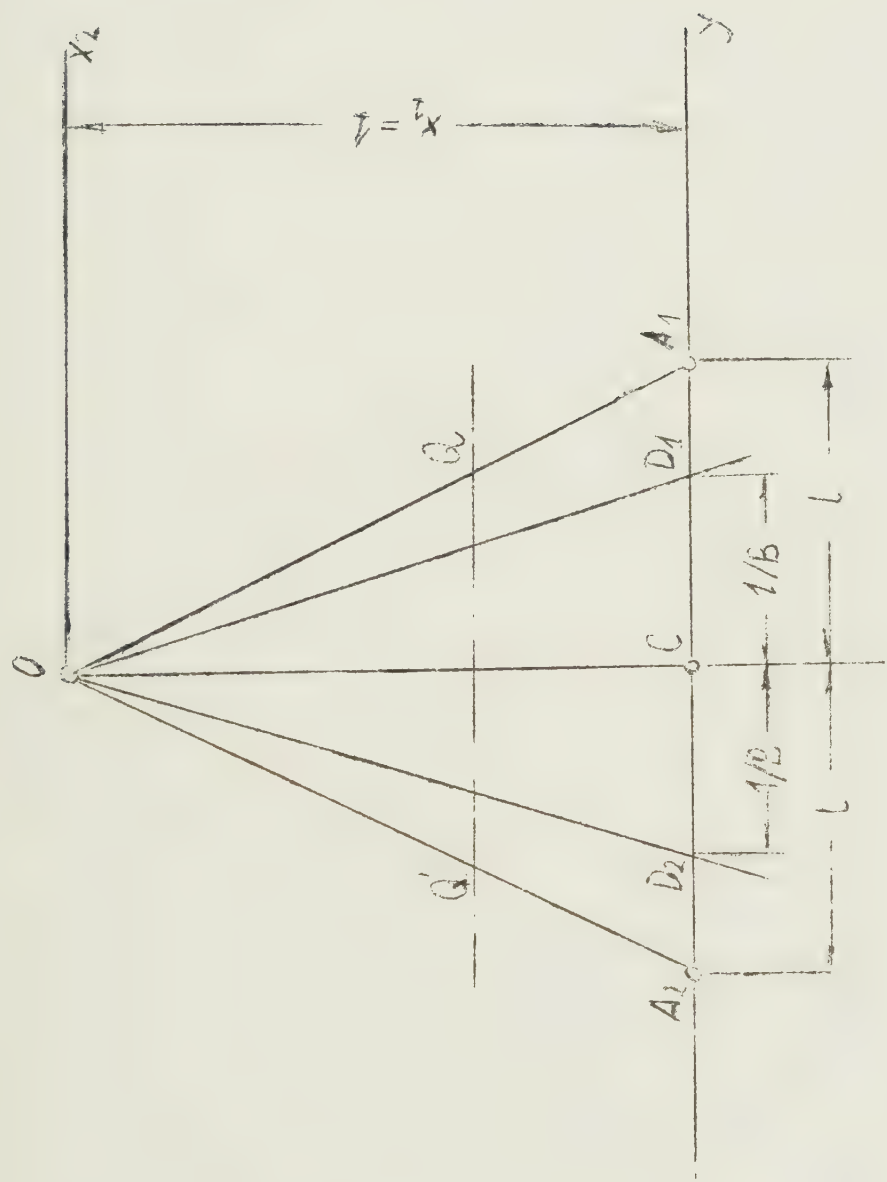


Fig 3-b

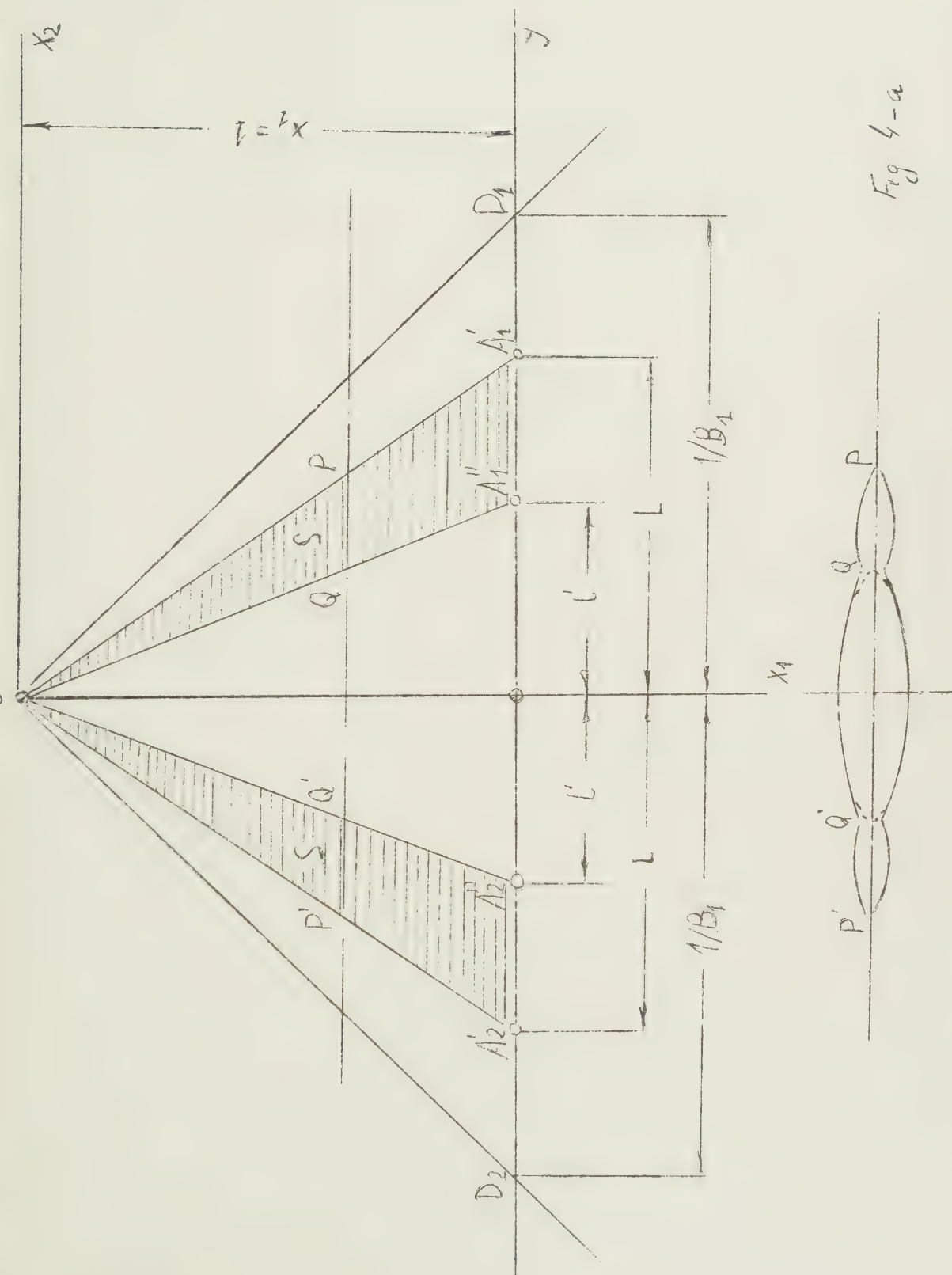


Fig 4-a

a) Le premier problème d'extremum concerne la détermination de la forme de la surface de l'aile delta mince pliée qui doit être de résistance minimum pour le nombre Mach de croisière M et qui doit satisfaire aussi aux conditions de liaison suivantes : la projection dans le plan de l'aile A_1OA_2 (donc l'envergure $2l$) la portance C_L le moment de tangage C_m , ainsi que le profil central sont donnés.

On suppose aussi que l'aile est munie d'une arête centrale OC .

b) Le second problème variationnel concerne la détermination de la surface additionnelle (S) de l'aile delta mince dépliée (par rapport à l'aile pliée) ainsi que l'entière aile dépliée soit de résistance minime pour le nombre Mach $M_1 < M$ et qui doit satisfaire aussi aux conditions de liaisons suivantes : la projection dans le plan (donc l'envergure $2L > 2l$), la portance C_L et le moment de tangage C_m soient donnés. On suppose que l'aile est munie d'une arête OC et que la surface de l'aile doit satisfaire aussi une condition de continuité le long de cette arête.

Pour ces deux problèmes d'extremum on suppose que la vitesse axiale doit s'annuler le long des bords d'attaque subsoniques OA_1 , OA_2 , OA'_1 et OA'_2 , afin d'éviter, pour les deux vitesses de croisière, la formation des nappes des tourbillons en cornet.

Dans la résistance à l'avancement on a inclue aussi la force de succion qui a la tendance de se former à cause de l'effet de contournement des bords d'attaque subsonique de l'aile pliée et dépliée. Les deux problèmes d'extrema considérés sont traités en deux hypothèses de calcul, c'est-à-dire :

- l'hypothèse classique, qui est valable pour les petites incidences et selon laquelle on considère que la vitesse axiale de perturbation u est infinie le long des bords d'attaque subsoniques de l'aile delta pliée et dépliée, l'effet de succion est pris en considération et le phénomène de la formation des nappes des tourbillons en cornet est négligé ;

- la seconde hypothèse selon laquelle on impose la condition d'annulation de la vitesse axiale de perturbation le long des bords d'attaque subsoniques de l'aile delta pliée et dépliée pour les deux vitesses de croisière considérées. L'effet du contournement des bords d'attaque disparaît et par conséquent la force de succion ne se produit plus.

Les deux hypothèses seront prises simultanément en considération.

Si l'on néglige, dans le système final représentant la solution des deux problèmes d'extrema étudiés, les conditions d'annulation de la vitesse axiale de perturbation le long des bords d'attaque subsoniques, on se trouve dans le cadre de la première hypothèse de calcul.

Si, par contre, on annule dans le système final les termes provenant de la succion, on se trouve dans le cadre de la seconde hypothèse de calcul.

II. 2.2 Détermination des vitesses axiales de perturbation u pour

l'aile delta pliée et dépliée.

On considère l'aile rapportée à un système triorthogonal d'axes Ox_1, x_2, x_3 ayant l'axe Ox_1 parallèle à la vitesse U_∞ du courant non-perturbé à l'infini et le plan Ox_1x_2 contenant l'aile, supposée complètement aplatée.

La vitesse verticale de perturbation sur l'aile est supposée obtenue à la suite de la superposition de certains polynômes homogènes c'est-à-dire

$$w = \sum_{m=1}^N w_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} |y|^k \quad (1)$$

$$(y = \frac{x_2}{x_1})$$

sur OA_1A_2 et

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^N \bar{w}_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \bar{w}_{m-k-1,k} |y|^k \quad (2)$$

sur $OA_2A'_2$ et $OA_1A'_1$. Dans les formules (1) et (2) $w_{m-k-1,k}$ et $\bar{w}_{m-k-1,k}$ sont des constantes inconnues et $N-1$ est le degré du polynôme homogène de l'ordre le plus grand pris en considération dans les expressions de w et $\bar{w}$.

Si l'on fait l'intégration des formules (1) et (2) par rapport à x_1 , on obtient les côtes des surfaces de l'aile Z et $\bar{Z}$ sur OA_1A_2 et, respectivement, sur $OA_2A'_2$ et $OA_1A'_1$

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) &= \frac{1}{U_\infty} \int w dx_1 + f(x_2) = \\ &= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \frac{|y|^k}{m-k} + f(x_2) \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{Z}(x_1, x_2) &= \frac{1}{U_\infty} \int \bar{w} dx_1 + \bar{f}(x_2) = \\ &= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} \bar{w}_{m-k-1,k} \frac{|y|^k}{m-k} + \bar{f}(x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Dans ces formules $f(x_2)$ et $\bar{f}(x_2)$ sont des fonctions arbitraires de x_2 qui peuvent être déterminées en satisfaisant des conditions géométriques supplémentaires imposées pour la surface de l'aile.

On considère d'abord l'aile delta mince pliée (hachurée dans les figures 1a, b) ayant aussi une arête centrale OC ; la vitesse axiale de perturbation u a les formes suivantes :

$$u = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{A_{n,2q} y^{2q}}{B^2 (1-y^2)} + \sum_{q=0}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1^2}{y^2}} \right\} \quad (5)$$

pour l'aile pliée mince aux bords d'attaque subsoniques (fig 1a) et

$$\begin{aligned} u = & \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{A_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{1-B^2 y^2}} + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 y^2}} + \\ & + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq} y^q \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B1)(1-By)}{2B(1-y)}} + \right. \\ & \left. + (-1)^q \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B1)(1+By)}{2B(1+y)}} \right] \left. \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

pour l'aile delta mince pliée aux bords d'attaque supersoniques par rapport au premier nombre Mach de croisière M (fig 1b)

On considère maintenant l'aile delta mince dépliée. Parce que la géométrie de la position centrale de l'aile ne se modifie pas, la vitesse verticale de perturbation $w = \frac{\partial z}{\partial x_1}$ reste aussi invariable. Les bords d'attaque OA_1 et OA_2 de l'aile pliée deviennent des arêtes sur l'aile dépliée. On obtient aussi les expressions suivantes sur la vitesse axiale de perturbation u (fig 2a)

$$u = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^E \left(\frac{n}{2} \right) \frac{A'_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{B_1^2 (L^2 - y^2)}} + \sum_{q=1}^{E \left(\frac{n-1}{2} \right)} C'_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{L^2}{y^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-1} G'_{nq} y^q \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+1)(L-y)}{2L(1-y)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+1)(L+y)}{2L(1+y)}} \right] \right\} \quad (7)$$

si les bords d'attaque OA'_1 et OA'_2 de l'aile dépliée sont subsoniques et (fig 2b)

$$u = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^E \left(\frac{n}{2} \right) \frac{A'_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{1 - B_1^2 y^2}} + \sum_{q=1}^{E \left(\frac{n-1}{2} \right)} C'_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 y^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq} y^q \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-B_1 y)}{2B_1 (L-y)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+B_1 y)}{2B_1 (L+y)}} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+B_1 y)}{2B_1(1+y)}} \Bigg] + \\
 & + \sum_{q=0}^{n-1} H'_{nq} y^q \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1-B_1 y)}{2B_1(L-y)}} + \right. \\
 & \left. + (-1)^q \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 y)}{2B_1(L+y)}} \right] \Bigg\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

si les bords d'attaques OA'_1 et OA'_2 de l'aile dépliée sont supersoniques (fig 2c) par rapport au second nombre Mach de croisière $M_1 < M$ ($B_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$).

Remarque

Si l'aile pliée a les bords d'attaque supersoniques (fig 2c) pour le deuxième nombre Mach M_1 de croisière dans la formule (8) on doit remplacer "argch" par "arccos" dans les termes qui contiennent les coefficients G'_{nq} et qui représentent la contribution des bords d'attaque de l'aile pliée dans la formule de u sur l'aile dépliée. Les coefficients $A_{n, 2q}$, $A'_{n, 2q}$ eto.. des vitesses axiales de perturbation u sont liés aux coefficients des vitesses verticales par des relations linéaires parfaitement déterminées sous la forme donnée dans nos ouvrages antérieurs (C.11-N.10), (N.1) et qui proviennent des relations de comptabilité dues à P. Germain [G.-1] [G.-2].

Les coefficients de la vitesse axiale de perturbation sur l'aile pliée dépendent seulement des coefficients $w_{n-j-1, j}$ de w , parcequ'ils sont fonction seulement de la surface de l'aile pliée.

On peut alors écrire

$$A_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (9 \text{ a})$$

$$C_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} c_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (9 \text{ b})$$

$$G_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} g_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (9 \text{ c})$$

En échange les coefficients des vitesses axiales de perturbation sur l'aile dépliée dépendent de coefficients de w et aussi de coefficients de $\bar{w}$. On obtient ainsi les relations suivantes :

$$A'_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} (a'_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{a}'_{2q,j}^{(n)} \bar{w}_{n-j-1,j}) \quad (10 \text{ a})$$

$$C'_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} (c'_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{c}'_{2q,j}^{(n)} \bar{w}_{n-j-1,j}) \quad (10 \text{ b})$$

$$G'_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (g'_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{g}'_{qj}^{(n)} \bar{w}_{n-j-1,j}) ; \quad (10 \text{ c})$$

$$H'_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (h'_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{h}'_{qj}^{(n)} \bar{w}_{n-j-1,j}) \quad (10 \text{ d})$$

Remarques.

a) Dans les formules (9 a,b,c) les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$

et $g_{q,j}^{(n)}$ dépendent de la projection dans le plan de l'aile delta pliée et du premier nombre Mach M de croisière ($B = \sqrt{M^2 - 1}$).

b) Les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $a'_{2q,j}^{(n)}$ etc...; dépendent de projections dans le plan de l'aile en position pliée ou dépliée et du second nombre Mach de croisière M_1 ($B_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$).

Par conséquent si les projections dans le plan de l'aile en position pliée et dépliée et pour deux vitesses de croisière choisissent d'avance les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $a'_{2q,j}^{(n)}$, $\bar{a}_{2q,j}^{(n)}$ etc... sont des constantes pour les deux problèmes d'extrema considérés.

Avant de passer à la résolution des deux problèmes d'extréma on va donner les expressions des relations de liaisons et les expressions des caractéristiques aérodynamiques de l'aile en position pliée et dépliée sous forme explicite.

A cause de la symétrie on tient compte dans le calcul seulement de la demi-aile.

II. 2.3. Le premier problème d'extremum de l'aile delta mince pliée

Les conditions de liaison géométriques de ce problème d'extremum sont les suivantes :

- a) Le profil central de l'aile est donné ;
- b) La vitesse axiale doit s'annuler le long des bords d'attaque subsoniques OA_1 et OA_2 de l'aile delta pliée.

Si le profil central de l'aile est donné sur la forme d'une fonction $\phi(x_1)$, $[Z(x_1, 0) = \phi(x_1)]$ et si on suppose que $\phi(x_1)$ peut être développé en série Mac Laurin, on obtient par identification, les relations de liaisons suivantes :

$$E_t \equiv w_{t-1,0} - \frac{U_\infty}{(t-1)!} \phi_{(0)}^{(t)} = 0 \quad (11)$$

$$(t = 1, 2, \dots, N)$$

Si on annule l'expression de la vitesse axiale de perturbation le long du bord d'attaque OA_1 ($y = 1, u = 0$) on obtient les relations de liaisons suivantes :

$$F_{(t)}^{(1)} \equiv \sum_{q=0}^{\frac{(t)}{2}} A_{t,2q} 1^{2q} = \sum_{j=0}^{t-1} \theta_{tj} w_{t-j-1,j} = 0 \quad (12)$$

$$(t = 1, 2, \dots, N)$$

Les conditions de liaisons de nature aérodynamiques sont les suivantes :

a) la condition que la portance de l'aile soit donnée $C_1 = C_{1_0} = \text{const}$, qui conduit à la relation de liaison :

$$C_1 = \frac{4}{U_\infty^1} \int_{OA_1 A_2} u x_1 dx_1 dy = \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = \text{const} \quad (13)$$

Dans cette formule Λ_{nj} sont constantes dans le problème d'extremum considéré ;

b) de la même manière on obtient une autre relation de liaison de la condition que le moment de tangage soit donné ($C_m = C_{m_0} = \text{const.}$)

$$C_m = \frac{4}{U_\infty} \int_{OA_1 A_2} u x_1^2 dx_1 dy = \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = \text{const} \quad (14)$$

les constantes Λ_{nj} ont la même signification que dans la formule (13).

De même l'expression du coefficient de résistance d'onde est :

$$C_d \equiv \frac{8}{U_\infty^2} \int_{OA_1C} w dx_1 dy = \tag{15}$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j}$$

où Ω_{nmkj} sont des constantes dans le problème d'extremum considéré.

Enfin l'expression du coefficient de succion σ est

$$\sigma = - \frac{4 \pi}{U_\infty^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{m+n} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-B^2} y^2}{1} (1-y) u_{m-1} u_{n-1} =$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} \tag{16}$$

où Δ_{nmkj} sont des constantes.

Toutes les constantes Ω_{nmkj} , Δ_{nmkj} et λ_{nj} sont données dans l'annexe.

Dans ce qui précède on a obtenu tous les termes qui interviennent dans le problème d'extremum considéré.

On doit donc trouver les valeurs des coefficients $w_{n-j-1,j}$ de telle sorte que

$$C_d + \sigma = \text{minimum} \tag{17}$$

avec les conditions de liaisons

$$C_1 = C_{1_0}, \quad C_m = C_{m_0} \quad E_t = 0 \quad F_t^{(1)} = 0 \tag{18}$$

(t=1, 2, ..., N)

Ce problème d'extremum avec liaisons se réduit au calcul d'extremum sans liaisons de l'expression de Hamilton

$$H = C_d + \sigma + \lambda^{(1)} C_1 + \lambda^{(2)} C_m + \sum_{t=1}^N (\bar{\lambda}_t E_t + \mu_t F_t^{(1)}) \quad (19)$$

où λ_1 , λ_2 , $\bar{\lambda}_t$ et μ_t sont les multiplicateurs de Lagrange.

A son tour l'extremum de H peut être obtenu en annulant sa première variation ($\delta H = 0$). En tenant compte du fait que les coefficients $w_{n-j-1,j}$ de la vitesse verticale de perturbation w sont maintenant indépendants, par l'annulation des coefficients de chacune des variations

$\delta w_{\theta\sigma}$ on obtient des relations de la forme suivante :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^N \left[\Omega_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \Omega_{\theta + \sigma + 1, n, j} + \Delta_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \Delta_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma} \right] w_{n-j-1, j} + \left[\lambda^{(1)} + \frac{\theta + \sigma + 2}{\theta + \sigma + 3} \lambda^{(2)} \right] \Lambda_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \bar{\lambda}_{\theta + 1} \delta_{\sigma}^{\sigma} + \mu_{\theta + \sigma + 1} \Theta_{\theta + \sigma + 1, \sigma} = 0$$

$$\theta, \sigma = 0, 1 \dots (N-1) \quad 1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N \quad (20)$$

Ces équations, ainsi que les conditions de liaisons (18) forment un système linéaire fini d'équations algébriques qui détermine d'une manière univoque les valeurs optima des coefficients $w_{n-j-1,j}$ ainsi que les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\bar{\lambda}_t$ et μ_t .

Le premier problème d'extremum de l'aile delta mince pliée peut être considéré comme résolu.

II. 2. 4. Le deuxième problème d'extremum de l'aile delta mince dépliée

Les conditions géométriques de liaison sont les suivantes :

a) la condition de continuité de la surface de l'aile dépliée le long des arêtes OA_1 et OA_2 .

b) la condition que la vitesse axiale de perturbation s'annule le long des bords d'attaque subsoniques OA'_1 et OA'_2 de l'aile dépliée.

A cause de l'asymétrie de l'aile on va poser ces conditions seulement le long de l'arête OA_1 et respectivement sur le bord d'attaque OA'_1 .

a) Si l'aile est continue le long du bord OA_1 ($y = 1$ $z = \bar{z}$) alors on obtient la relation

$$\frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1^k}{m-k} (w_{m-k-1,k} - \bar{w}_{m-k-1,k}) = \quad (21)$$

$$= f(x_1, 1) - \bar{f}(x_1, 1)$$

Cette relation peut être considérée comme une relation entre les fonctions inconnues $f(x_1, 1)$ et $\bar{f}(x_1, 1)$ et peut être éliminée des conditions de liaisons du problème d'extremum.

b) Si on annule la vitesse axiale de perturbation u le long du bord d'attaque de l'aile delta dépliée ($y = L$, $u=0$) on obtient les relations de liaisons suivantes :

$$F_t^{(1)} \equiv \sum_{q=0}^{E(\frac{t}{2})} A'_{t,2q} L^{2q} = \sum_{j=0}^{t-1} (\theta'_{t,j} w_{t-j-1,j} + \bar{\theta}'_{t,j} \bar{w}_{t-j-1,j}) = 0 \quad (22)$$

$$(t=1, 2, \dots, N)$$

Les conditions de liaisons et les caractéristiques aérodynamiques

sont :

a) la condition que la portance de l'aile dépliée soit donnée

($C_L = C_{L_0} = \text{const.}$), c'est-à-dire

$$C_L = \frac{8}{U_\infty L} \int_{OCA'_1} u x_1 dx_1 dy = \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^N (\Lambda'_{nj} w_{n-j-1,j} + \bar{\Lambda}'_{nj} \bar{w}_{n-j-1,j}) = C_{L_0} = \text{const.}$$

Dans cette formule Λ'_{nj} et $\bar{\Lambda}'_{nj}$ sont des constantes dans le problème d'extremum considéré ;

b) la condition que le moment de tangage soit connu ($C_M = C_{M_0} = \text{const.}$) c'est-à-dire

$$C_M = \frac{8}{U_\infty L} \int_{OCA'_1} u x_1^2 dx_1 dy =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} (\Lambda'_{nj} w_{n-j-1,j} + \bar{\Lambda}'_{nj} \bar{w}_{n-j-1,j}) =$$

$$= C_{M_0} = \text{const.} \quad (24)$$

où Λ'_{nj} et $\bar{\Lambda}'_{nj}$ ont la même signification que dans la formule (23).

L'expression du coefficient de résistance d'onde est

$$C_D = \frac{8}{U_\infty^2 L} \left[\int_{OA_1C} w u x_1 dx_1 dy + \int_{OA_1A'_1} \bar{w} u x_1 dx_1 dy \right] =$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \right. \quad (25)$$

$$+ \Omega_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \bar{\Omega}_{nmkj} w_{m-k-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} +$$

$$\left. + \bar{\Omega}_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-k-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} \right]$$

où Ω_{nmkj} , $\Omega_{nmkj}^{(1)}$ etc... sont des constantes dans le problème d'extremum considéré.

Enfin, le coefficient de succion a l'expression suivante

$$\sigma' = - \frac{4}{U_\infty^2 L} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{m+n} \lim_{y \rightarrow L} \frac{\sqrt{1-B_1^2 L^2}}{L} (L-y) u_{m-1} u_{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\Delta_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \right. \quad (26)$$

$$+ \Delta_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \bar{\Delta}_{nmkj} w_{m-k-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} +$$

$$\left. + \bar{\Delta}_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-k-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} \right]$$

où Δ_{nmkj} , $\Delta_{nmkj}^{(1)}$ etc... sont des constantes.

Toutes les constantes sont données dans l'annexe.

Le deuxième problème d'extremum concerne la détermination des coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ de $\bar{w}$ de telle sorte que

$$C_D + \sigma' = \text{minimum} \quad (27)$$

avec les conditions de liaisons

$$C = \text{const.}, \quad C_M = \text{const.} \quad F_t^{(1)} = 0 \quad (28)$$

(t = 1, 2..., N)

Ce problème d'extremum avec des liaisons conduit à la résolution du problème d'extremum sans liaisons de l'expression de Hamilton

$$H = (C_D + \sigma') + \lambda^{(1)} C_L + \lambda^{(2)} C_M + \sum_{t=1}^N \lambda_t F_t^{(1)} \quad (29)$$

où $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ et λ_t sont les multiplicateurs de Lagrange.

A son tour l'extremum de H s'obtient si on annule sa première variation ($\delta H = 0$).

Dans le problème d'extremum de l'aile dépliée on considère que les coefficients $w_{n-j-1,j}$ sont connus et donnés par le problème d'extremum de l'aile pliée.

Parce que les coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ de $\bar{w}$ sont maintenant indépendants, par l'annulation des coefficients de chacune des variations

$\delta \bar{w}_{\theta\sigma}$ on obtient des relations de la forme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(\bar{\Omega}_{n,\theta+\sigma+1,\theta,j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} + \bar{\Delta}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(1)} + \bar{\Delta}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} \right) \bar{w}_{n-j-1,j} + \left(\bar{\Omega}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} + \bar{\Delta}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(1)} + \bar{\Delta}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} \right) w_{n-j-1,j} \right] + \left(\lambda_{\theta+\sigma+1}^{(1)} \bar{\Theta}_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda_{\theta+\sigma+1}^{(2)} \bar{\Lambda}_{\theta+\sigma+1,\sigma} \right) = 0 \quad (30)$$

$\theta, \sigma = 0, 1... (N-1) \quad 1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N$

Ces équations, avec les conditions de liaisons (28) constituent un système linéaire d'équations algébriques qui détermine d'une manière univoque les valeurs optimales des coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ de $\bar{w}$ ainsi que les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ et λ_t .

Le problème d'extremum de l'aile delta mince dépliée peut être considéré comme résolu.

II. 3. Le problème variationnel de l'aile delta à épaisseur symétrique

II. 3. 1. Considérations générales

L'étude de ce problème variationnel conduit à deux problèmes d'extremum en cascade qu'on est en train de préciser.

a) Le premier problème d'extremum consiste dans la détermination de la surface de l'aile pliée à épaisseur symétrique qui doit être de résistance minime pour le nombre Mach de croisière M et qui doit satisfaire aussi les relations de liaison suivantes : la projection OA_1A_2 (fig.3 a,b) de l'aile dans le plan Ox_1x_2 (donc l'envergure $2l$) le profil central et le volume de l'aile sont donnés. L'aile doit être aussi d'épaisseur nulle sur ses bords d'attaque OA_1 et OA_2 et sur le bord de fuite A_1A_2 . L'aile est pourvue aussi d'une arête centrale OC .

b) Le second problème d'extremum se réfère à la détermination de la surface additionnelle (S) de l'aile dépliée par rapport à l'aile pliée qui a les projections $A_1OA'_1$ et $A_2OA'_2$ (dans les figures 4 a,b,c hachurées), de telle sorte que l'aile dépliée tout entière soit de résistance minimum pour le second nombre Mach de croisière $M_1 < M$ et qui doit satisfaire aussi les conditions de liaison suivantes : la projection de l'aile dépliée $OA'_1A'_2$ (donc l'envergure $2L$) et le volume de l'aile dépliée doivent être donnés. L'aile dépliée doit être aussi d'épaisseur

nulle le long de ses bords d'attaque (OA'_1 et OA'_2) et de son bord de fuite $A'_1A'_2$.

On suppose que sur l'aile pliée il y a deux charnières OA''_1 et OA''_2 , séparant les portions marginales $OA_1A''_1$ et $OA_2A''_2$ de l'aile pliée qui s'escamotent du reste qui est fixe pour rendre possible la sortie de la surface additionnelle (S) formée par deux volets de bord d'attaque $OA_1A'_1$ et $OA_2A'_2$.

Le long de ces charnières la surface de l'aile pliée et la surface additionnelle (S) formée par ces volets doit se raccorder.

On suppose, comme dans le cas de l'aile mince que les vitesses verticales de perturbation w et $\bar{w}$ sont maintenant données sur l'extrados de l'aile à épaisseur symétrique sous la forme d'une superposition des polynômes homogènes en x_1 et x_2 comme dans le cas de l'aile mince component, c'est-à-dire :

$$w = \sum_{m=1}^N w_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} |y|^k \quad (31)$$

sur OA_1A_2 et

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^N \bar{w}_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \bar{w}_{m-k-1,k} |y|^k \quad (32)$$

sur $OA''_1A'_1$ et $OA''_2A'_2$.

Si l'on fait l'intégration par rapport à x_1 des formules (31) et (32), on obtient les équations des surfaces $Z(x_1, x_2)$ et $\bar{Z}(x_1, x_2)$ de l'extrados de l'aile sur OA_1A_2 et, respectivement, sur $OA_1A'_1$ et $OA_2A'_2$.

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \frac{|y|^k}{m-k} + f(x_2) \quad (33)$$

et

$$\bar{Z} = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} \bar{w}_{m-k-1,k} \frac{|y|^k}{m-k} + \bar{f}(x_2) \quad (34)$$

Les fonctions arbitraires $f(x_2)$ et $\bar{f}(x_2)$ seront déterminées en satisfaisant certaines conditions géométriques imposées à l'aile. La formule de la vitesse axiale de perturbation pour l'aile pliée à épaisseur symétrique qui a les bords d'attaque supersoniques est identique à celle de l'aile mince pliée à bords d'attaque supersoniques (6) c'est-à-dire :

$$u = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \begin{aligned} & E \left(\frac{n-1}{2} \right) \sum_{q=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{A_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{1-B^2} y^2} + \sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2} y^2} + \\ & + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq} y^q \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-By)}{2B(1-y)}} + \right. \\ & \left. + (-1)^q \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+By)}{2B(1+y)}} \right] \end{aligned} \right. \quad (35)$$

A partir de (35) la vitesse u sur l'aile pliée à épaisseur symétrique aux bords d'attaque subsoniques s'obtient en remplaçant dans les termes qui contiennent les coefficients G_{nq} (et qui représentent la contribution des bords d'attaque dans l'expression de u) "arccos" par "argch".

La vitesse axiale de perturbation u sur l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique a une forme similaire à (8) c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 u = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} & \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{A_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{1-B_1^2} y^2} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C'_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 y^2}} + \right. \\
 & + \sum_{q=0}^{n-1} G'_{nq} y^q \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-B_1 y)}{2B_1(1-y)}} + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+B_1 y)}{2B_1(1+y)}} \right] \\
 & + \sum_{q=0}^{n-1} H'_{nq} y^q \left[\arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1-B_1 y)}{2B_1(L+y)}} + \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 y)}{2B_1(L+y)}} \right] \right\} \quad (36)
 \end{aligned}$$

si l'aile a des bords d'attaque supersoniques. Si l'aile a les bords d'attaque subsoniques dans les termes qui contiennent les constantes H'_{nq} , on doit remplacer "arccos" par "argch". Les relations entre les coefficients $w_{n-j-1,j}$, $\bar{w}_{n-j-1,j}$ des vitesses verticales de perturbation w et $\bar{w}$ et les coefficients $A_{n,2q}$, $A'_{n,2q}$ etc... des vitesses axiales de perturbation u sont linéaires et homogènes, analogues à (6) et (7). En tenant compte que la vitesse axiale de perturbation sur l'aile pliée dépend seulement de la forme de la surface pliée donc seulement des coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w tandis que la vitesse axiale sur l'aile dépliée dépend des formes de la surface de l'aile en position pliée et dépliée, on peut donc écrire

$$A_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (37)$$

et respectivement

$$A'_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} (a'_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{a}'_{2q,j}^{(n)} \bar{w}_{n-j-1,j}) \quad (38)$$

etc..

Les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$ dépendent de la projection dans le plan de l'aile pliée (donc de l) et du premier nombre Mach de croisière M .

Les coefficients $a'_{2q,j}^{(n)}$, $\bar{a}'_{2q,j}^{(n)}$, $c'_{2q,j}^{(n)}$ etc...; dépendent des projections dans le plan de l'aile de position pliée et dépliée (c'est-à-dire de l et L) et du second nombre Mach de croisière M_1 . Par conséquent tous ces coefficients sont des constantes dans les problèmes d'extrême de l'aile en position pliée et dépliée.

II. 3. 2. Premier problème d'extremum pour l'aile delta pliée à épaisseur symétrique

Les conditions géométriques de liaison pour l'aile pliée sont :

- l'épaisseur de l'aile doit être nulle sur le bord de fuite

$$A_1 A_2 (x_1 = 1, Z = 0) ;$$

- l'épaisseur de l'aile doit être nulle sur le bord d'attaque

$$O A_1 (y = 1, Z = 0).$$

- le volume de l'aile est donné ($V = V_0$).

- le profil central de l'aile est donné ($x_2 = 0, Z = \phi(x_1)$).

De la condition que l'épaisseur de l'aile doit être nulle sur le bord de fuite $A_1 A_2 (x_1 = 1, Z = 0)$, on peut déterminer la fonction arbitraire $f(x_2)$. On obtient ainsi pour Z la formule suivante :

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,k}}{m-k} x_2^k (x_1^{m-k} - 1) \quad (39)$$

et cette condition peut être éliminée des conditions de liaisons du problème d'extremum considéré.

- En posant la condition que l'épaisseur de l'aile pliée doit être nulle sur le bord d'attaque OA_1 ($y = 1, Z = 0$) on obtient les conditions de liaison suivantes :

$$E_t^{(1)} \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{m-1} d_{mk}^{(t)} w_{m-k-1,k} = 0 \quad (40)$$

$$t = 0, 1, \dots, (N-1)$$

où $d_{mk}^{(t)}$ sont les constantes

$$d_{mk}^{(t)} = \frac{1^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \quad (41)$$

Remarque

A cause de la symétrie de l'aile par rapport au plan Ox_1x_3 il ressort que la condition que l'aile à l'épaisseur nulle sur le bord d'attaque OA_2 ($y = -1, Z = 0$) est automatiquement satisfaite si les conditions (40) sont satisfaites.

La condition que le volume de l'aile soit donné peut s'écrire sous la forme

$$V = \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{mk} w_{m-k-1,k} = V_0 \quad (42)$$

où τ_{mk} sont les constantes suivantes

$$\tau_{mk} = - \frac{2.1^{k+1}}{(m+2)(k+1)(k+2) U_{\infty}} \quad (43)$$

Finalement, si dans la condition que le profil central de l'aile soit donné $[Z(x_1, 0) = \phi(x_1)]$ on développe en série Mac Laurin la fonction $\phi(x_1)$ et si on fait l'identification de l'expression obtenue avec celle de $Z(x_1, 0)$ donnée par (39) (dans laquelle on pose $x_2 = 0$) on obtient les conditions suivantes de liaison

$$E_t \equiv w_{t,0} - \frac{U_{\infty} \phi^{(t+1)}(0)}{t!} = 0 \quad (44)$$

$$t = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Pour la résolution du problème d'extremum proposé on doit avoir aussi l'expression du coefficient de résistance d'onde de l'aile c'est-à-dire

$$C_d = \frac{8}{U_{\infty}^2} \int_{OA_1C} w u x_1 dx_1 dy =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} \quad (45)$$

où Ω_{nmkj} sont des constantes données dans l'annexe.

Le problème d'extremum de l'aile delta pliée à épaisseur symétrique consiste dans la détermination des valeurs des coefficients $w_{n-j-1,j}$ de la vitesse verticale w de telle sorte que

$$C_d = \text{minimum} \quad (46)$$

et que les conditions de liaison :

$$V = V_0, \quad E_t = 0, \quad E_t^{(1)} = 0 \quad (47)$$

$$t = 0, 1, \dots, (N-1)$$

soient en même temps satisfaites.

Ce problème d'extremum avec liaisons se réduit à la résolution du problème d'extremum sans liaisons de l'expression d'Hamilton

$$H = C_d + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{N-1} (\lambda_t E_t + \lambda_t^{(1)} E_t^{(1)}) \quad (48)$$

A son tour l'extremum de H s'obtient par l'annulation de sa première variation, c'est-à-dire en faisant $\delta H = 0$. Parce que dans l'expression (48) de H les coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w sont indépendants, si on annule les coefficients de chaque variation $\delta w_{\theta \sigma}$ on obtient des relations de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} (\Omega_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \Omega_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma}) w_{n-j-1, j} + \\ & + \lambda^{(0)} \tau_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \sum_{t=0}^{\theta + \sigma} \lambda_t^{(1)} d_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \delta_0^{\sigma} \lambda_{\theta + 1} = 0 \quad (49) \end{aligned}$$

$$\theta, \sigma = 0, 1 \dots (N-1)$$

$$1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N$$

Les équations (49) avec les conditions de liaison (47) forment un système linéaire fini d'équations algébriques qui fournit les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w ainsi que les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(0)}$, λ_t et $\lambda_t^{(1)}$.

Le problème d'extremum de l'aile delta pliée à épaisseur symétrique peut être considéré comme résolu.

II . 3. 3. Le deuxième problème d'extremum de l'aile delta à épaisseur symétrique, en position dépliée

L'aile delta dépliée à épaisseur symétrique doit satisfaire les conditions de liaison suivantes :

- L'épaisseur de l'aile dépliée sur le bord de fuite doit être nulle. Parce qu'on a posé déjà la condition que l'épaisseur de l'aile delta soit nulle sur le bord de fuite A_1A_2 de l'aile pliée, on doit poser cette condition seulement sur la portion supplémentaire $A_1A'_1$ du bord de fuite de l'aile dépliée.
- L'épaisseur de l'aile dépliée doit être nulle sur son bord d'attaque OA'_1 ($y = L$, $Z = 0$).
- Le volume de l'aile dépliée est donné.
- La surface de l'aile doit être continue le long de la charnière OA'_1 c'est-à-dire ($y = l'$, $Z = \bar{Z}$).

Remarque

A cause de la symétrie de l'aile par rapport au plan Ox_1x_3 toutes les conditions sont posées sur la demi-aile.

De la condition que l'aile dépliée soit d'épaisseur nulle sur la portion $A_1A'_1$ du bord de fuite ($x_1 = 1$, $\bar{Z} = 0$) on peut déterminer la fonction arbitraire $\bar{f}(x_2)$ de la formule (34). On obtient ainsi pour $\bar{Z}$ la formule suivante :

$$\bar{Z}(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{w}_{m-k-1,k}}{m-k} |x_2|^k (x_1^{m-k} - 1) \quad (50)$$

qui peut, aussi, être obtenue également en remplaçant dans la formule (39) de Z les coefficients de w par les coefficients de $\bar{w}$.

De cette manière la condition que l'aile soit d'épaisseur nulle le long du bord de fuite n'intervient plus parmi les conditions de liaison du problème de l'aile dépliée à épaisseur symétrique.

Si on pose maintenant la condition que l'épaisseur de l'aile soit nulle le long du bord d'attaque OA'_1 ($y = L$, $Z = 0$) on obtient les conditions de liaison

$$E_t^{(2)} \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \bar{d}_{mk}^{(t)} w_{m-k-1,k}^{(t)} = 0 \quad (51)$$

$$t = 0, 1, \dots, (N-1)$$

où

$$\bar{d}_{mk}^{(t)} = \frac{L^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \quad (52)$$

Observation. A cause de la symétrie l'épaisseur de l'aile s'annule aussi le long du bord d'attaque OA'_2 de l'aile dépliée ($y = -L$, $Z = 0$). La condition que le volume de l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique soit donné conduit à la condition de liaison

$$V \equiv \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{mk} w_{m-k-1,k} + \bar{\tau}_{mk} \bar{w}_{m-k-1,k}) = V'_0 \quad (53)$$

Dans cette relation τ_{mk} ont la même signification que dans la formule (43) tandis que les constantes $\bar{\tau}_{mk}$ sont de la forme suivante :

$$\bar{\tau}_{mk} = - \frac{2(L^{k+1} - 1^{k+1})}{(m+2)(k+1)(k+2) U_{\infty}} \quad (54)$$

Finalement, la condition que la surface de l'aile soit continue le long de la charnière OA'' ($y = 1'$, $z = \bar{z}$) conduit aux relations

$$E_t^{(3)} \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{N-1} c_{mk}^{(t)} (w_{m-k-1,k} - \bar{w}_{m-k-1,k}) = 0 \quad (55)$$

où

$$c_{mk}^{(t)} = \frac{1',k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \quad (56)$$

L'expression du coefficient de résistance d'onde est de la forme

$$C_D = \frac{8}{U^2 L} \left[\int_{OA_1 C} w u x_1 dx_1 dy + \int_{OA_1 A_1'} \bar{w} u x_1 dx_1 dy \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \right. \quad (57)$$

$$+ \Omega_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \bar{\Omega}_{nmkj} w_{m-k-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} +$$

$$\left. + \bar{\Omega}_{nmkj}^{(1)} \bar{w}_{m-n-1,k} \bar{w}_{n-j-1,j} \right]$$

où

Ω_{nmkj} , $\Omega_{nmkj}^{(1)}$, etc... sont données dans l'annexe.

On peut donc passer à la résolution du problème d'extremum de l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique.

Les coefficients $w_{n-j-1,j}$ sont considérés maintenant constantes et ils ont les valeurs données par le premier problème d'extremum de l'aile delta pliée à épaisseur symétrique.

On doit donc déterminer les coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w de telle manière que pour l'aile dépliée

$$C_D = \min. \quad (58)$$

pour le nombre Mach de croisière M_1 et qui doit encore satisfaire les conditions auxiliaires suivantes

$$V = V_0, \quad E_t^{(2)} = 0, \quad E_t^{(3)} = 0 \quad (59)$$

$$t = 0, 1, \dots (N-1)$$

Ce problème d'extremum avec liaisons se réduit au calcul de l'extremum sans liaisons de l'expression

$$H = C_0 + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{N-1} \left(\lambda_t^{(2)} E_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} E_t^{(3)} \right) \quad (60)$$

Comme tous les termes qui interviennent dans l'expression de H sont écrits en une forme explicite, on peut obtenir l'extremum de H en annulant sa première variation ($\delta H = 0$).

En tenant compte du fait que les coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ sont indépendants, en annulant les coefficients de chacune des variations $\delta \bar{w}_{\theta \sigma}$, on obtient des équations de la forme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(\bar{\Omega}_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma}^{(1)} \right) \bar{w}_{n-j-1, j} + \left(\bar{\Omega}_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma}^{(1)} \right) w_{n-j-1, j} \right] + \lambda^{(0)} \bar{c}_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \sum_{t=0}^{\theta + \sigma} \left(\lambda_t^{(2)} \bar{d}_{\theta + \sigma + 1, \sigma} - \lambda_t^{(3)} c_{\theta + \sigma + 1, \sigma} \right) = 0 \quad (61)$$

$$\theta, \sigma = 0, 1, \dots (N-1)$$

$$1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N$$

Ces équations, avec les conditions de liaison (59) forment ensemble un système linéaire fini d'équations algébriques qui fournit les valeurs optimales des coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ de $\bar{w}$ ainsi que les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(0)}$, $\lambda_t^{(2)}$ et $\lambda_t^{(3)}$.

Le dernier problème d'extremum de l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique peut être donc considéré aussi comme résolu.

II. 4. ANNEXE DE CALCUL

On dénote par $I_k(1)$ la suivante intégrale indéfinie

$$\begin{aligned}
 I_k(1) &= \int \frac{y^k dy}{\sqrt{B^2(1-y^2)}} = -\frac{y^{k-1}}{k B} \sqrt{B^2(1-y^2)} + \frac{(k-1)1^2}{k} I_{k-2}(1) = \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j k! (2j)! 1^{k-j}}{(j!)^3 (k-j)! B} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^j \arcsin \frac{y}{|1|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{B^2(1-y^2)}}{B} \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2 1^{v-1}}{(2j-2v+1)! 2^v} (1-y)^{j-v} \right] \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

Si on remplace dans $I_k(1)$ 1 par $\frac{1}{B}$ on obtient l'intégrale

$$I_k^{**} \left(\frac{1}{B} \right)$$

$$\begin{aligned}
 I_k^{**} \left(\frac{1}{B} \right) &= \int \frac{y^k dy}{\sqrt{1-B^2 y^2}} = -\frac{y^{k-1}}{k B} \sqrt{1-B^2 y^2} + \frac{k-1}{kB^2} I_{k-2}^{**} \left(\frac{1}{B} \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j k! (2j)!}{(j!)^3 (k-j)! B^{k+1}} \left[\frac{1}{2^j} \arcsin By + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{1-B^2 y^2}}{B} \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2 (1-By)^{j-v}}{(2j-2v+1)! 2^v} \right] \quad (A-2)
 \end{aligned}$$

Si dans les formules (A-1) et (A-2) de $I_k(1)$ et $I_k^{**} \left(\frac{1}{B} \right)$ on fait les remplacements $1 \rightarrow L$ et $B \rightarrow B_1$ on obtient respectivement les intégrales dénotées par $I'_k(L)$ et $I'^{**}_k \left(\frac{1}{B_1} \right)$

Les intégrales de type I_k définies dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ sont
dénotées par $J_k(\alpha, \beta)$

Avec ces observations les expressions Λ_{nj} qui interviennent dans l'ex-
pression (13) du coefficient de portance de l'aile mince fermée ont les
formes suivantes :

$$\Lambda_{nj} = \frac{8}{1U_{\infty}(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)} J_{2q}(0, 1) + \right. \\ \left. + B1 \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{2q+1} J_{2q}(0, 1) \right\} \quad (A-3)$$

et respectivement

$$\Lambda_{nj}^* = \frac{8}{1U_{\infty}(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)} J_{2q}^{**}\left(0, \frac{1}{B}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{2q+1} + \sum_{q=0}^{n-1} \left[\frac{\sqrt{B-1}}{2} (1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^q \sum_{t=0}^q 1^{q-t} J_t^{**}\left(0, \frac{1}{B}\right) + 1^{q+1} \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2-1^2}} \right] \right\} \quad (A-4)$$

selon que l'aile a ses bords d'attaque subsoniques ou supersoniques par
rapport au premier nombre de Mach de croisière M

D'une manière similaire, on obtient pour l'aile mince dépliée des expressions
de la forme

$$\begin{aligned}
 \Lambda'_{nj} = & \frac{8}{U_{\infty} L(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'_{2q,j} \mathcal{J}'_{2q}(0; L) + \right. \\
 & + B_1 L \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'_{2q,j}}{2q+1} \mathcal{J}'_{2q}(0; L) + \\
 & \left. + \frac{\sqrt{B_1^2(L^2 - 1^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{t=0}^q \frac{g'_{qj}}{q+1} \frac{[1+(-1)^t] 1^{q-t}}{q+1} \mathcal{J}'_t(0; L) \right\} \quad (A-5)
 \end{aligned}$$

et respectivement

$$\begin{aligned}
 \Lambda'^{**}_{nj} = & \frac{8}{U_{\infty} L(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'_{2q,j} \mathcal{J}'^{**}_{2q}\left(0; \frac{1}{B_1}\right) + \right. \\
 & + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'_{2q,j}}{2q+1} \mathcal{J}'^{**}_{2q}\left(0; \frac{1}{B_1}\right) + \\
 & + \frac{\sqrt{1-B_1^2}}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{t=0}^q \frac{g'_{qj}}{q+1} [1+(-1)^t] 1^{q-t} \mathcal{J}'^{**}_t\left(0; \frac{1}{B_1}\right) \\
 & + \frac{\sqrt{B_1^2 L^2 - 1}}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{t=0}^q \frac{h'_{qj}}{q+1} [1+(-1)^t] L^{q-t} \mathcal{J}'^{**}_t\left(0; \frac{1}{B_1}\right) \left. \right\} \quad (A-6)
 \end{aligned}$$

selon que l'aile est dépliée à ses bords d'attaque subsoniques ou super-soniques par rapport au second nombre de Mach M_1 de croisière.

REMARQUES -

a) Les expressions de Λ'_{nj} et Λ'^{**}_{nj} s'obtiennent en remplaçant dans les expressions Λ'_{nj} et respectivement Λ'^{**}_{nj} les constantes $a'_{2q,j}$, $c'_{2q,j}$, g'_{qj} , etc... par leurs correspondantes barrées.

b) Si l'aile delta mince formée a aussi ses bords d'attaque supersoniques (pour le second nombre de Mach de croisière M_1) on doit remplacer

$$\sqrt{1 - B_1^2} \quad \text{par} \quad \sqrt{B_1^2 - 1} \quad \text{dans} \quad (A - 6)$$

Les expressions Δ_{nmkj} du coefficient de succion ont la forme

$$\Delta_{nmkj} = - \frac{4 \pi}{U_\infty^2(m+n)} \sum_{q=0}^{\frac{E(n)}{2}} \sum_{q'=0}^{\frac{E(m)}{2}} 1^{2(q+q')} \sqrt{1-B_1^2} a_{2q,j}^{(n)} a_{2q',k}^{(m)} \quad (A-7)$$

si l'aile delta mince pliée a des bords d'attaque subsoniques par rapport au premier nombre de Mach de croisière M et respectivement

$$\Delta'_{nmkj} = - \frac{4\pi \sqrt{1-B_1^2} L}{U_\infty^2(m+n)} \sum_{q=0}^{\frac{E(n)}{2}} \sum_{q'=0}^{\frac{E(m)}{2}} L^{2(q+q')} a'_{2q,j}^{(n)} a'^{(m)}_{2q',k} \quad (A-8)$$

si l'aile delta mince dépliée a ses bords d'attaque subsoniques par rapport au second nombre de Mach de croisière M_1 .

Les constantes $\Delta_{nmkj}^{(1)}$, $\bar{\Delta}_{nmkj}$ et $\Delta_{nmkj}^{-(1)}$ sont obtenues si on remplace d'une manière successive un des coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$ et $a_{2q',k}^{(m)}$ ou respectivement les deux coefficients susdits par leurs correspondants barrés dans l'expression (A - 8) de Δ_{nmkj} .

Les expressions Ω_{nmkj} sont de la forme :

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 l(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{\frac{E(n)}{2}} a_{2q,j}^{(n)} \mathcal{I}_{k+2q} (0, 1) + 1 \sum_{q=1}^{\frac{E(n-1)}{2}} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1} \mathcal{I}_{k+2q} (0, 1) \right\} \quad (A-9)$$

si l'aile delta mince pliée a ses bords d'attaque subsoniques ;

$$\Omega'_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2 L(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} a'_{2q,j} \gamma'_{k+2q}(0,1) + \right. \quad (A-10)$$

$$+ \sum_{q=1}^{\frac{E(n-1)}{2}} \frac{c'_{2q,j}}{k+2q+1} \left[B_1 L \gamma'_{k+2q}(0,1) + 1^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{L^2}{1^2}} \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{B_1^2 (L^2 - 1^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{k+q} \frac{g'_{qj}}{k+q+1} [1 + (-1)^{k+t}] 1^{k+q-t} \gamma'_t(0,1) \Big\}$$

et

$$\Omega'^{(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2 L(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} a'_{2q,j} \gamma'_{k+2q}(1,L) + \right. \quad (A-11)$$

$$+ \sum_{q=1}^{\frac{E(n-1)}{2}} \frac{c'_{2q,j}}{k+2q+1} \left[B_1 L \gamma'_{k+2q}(1,L) - 1^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{L^2}{1^2}} \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{B_1^2 (L^2 - 1^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{k+q} \frac{g'_{qj}}{k+q+1} [1 + (-1)^{k+t}] 1^{k+q-t} \gamma'_t(1,L) \Big\}$$

si l'aile delta mince dépliée a ses bords d'attaque subsoniques ;

$$\Omega^{**}_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2 l(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} a^{(n)}_{2q,j} \gamma^{**}_{k+2q}(0, \frac{1}{B}) + \right. \quad (A-12)$$

$$+ \sum_{q=1}^{\frac{E(n-1)}{2}} \frac{c^{(n)}_{2q,j}}{k+2q+1} \gamma^{**}_{k+2q}(0, \frac{1}{B}) + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h^{(n)}_{qj}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2} \{ 1 + \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^q \right) \sum_{t=0}^{k+q} 1^{k+q-t} \mathcal{J}_t^{**} \left(0 ; \frac{1}{B} \right) + 1^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B_1^2 1^2}} \right\}$$

pour l'aile delta pliée mince ou à épaisseur symétrique qui a ses bords d'attaque supersoniques et

$$\begin{aligned} \Omega_{nmkj}^{***} = & \frac{8}{U_\infty L(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} a'_{2q,j} (n) \mathcal{J}_{k,2q}^{**} (0,1) + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{c'_{2q,j} (n)}{k+2q+1} \left[\mathcal{J}_{k+2q}^{**} (0,1) + 1^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 1^2}} \right] + \\ & + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g'_{qj} (n)}{2(k+q+1)} \left[\sqrt{1-B_1^2 1^2} \sum_{t=0}^{k+q} [1+(-1)^{k+t}] 1^{k+q-t} \mathcal{J}_t^{**} (0,1) + \right. \\ & + [1+(-1)^{k+1}] 1^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 1^2}} + \\ & \left. + 2(-1)^q 1^{k+q+1} \left[1+(-1)^{k+q} \right] \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1 1)^2}{4B_1 1}} \right] + \\ & + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h'_{qj} (n)}{2(k+q+1)} \left[\sqrt{B_1^2 L^2 - 1} \sum_{t=0}^{k+q} [1+(-1)^{k+t}] L^{k+q-t} \mathcal{J}_t^{**} (0,1) + \right. \\ & + [1+(-1)^{k+1}] L^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B_1^2 L^2}} - 2 L^{k+q+1} - \\ & \left. - 1^{k+q+1} \right] \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1-B_1 1)}{2B_1 (L-1)}} + 2(-1)^q \left[1^{k+q+1} - \right. \end{aligned} \quad (A-13)$$

$$-(-L)^{k+q+1} \left] \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 1)}{2B_1(L+1)}} \right] \left. \vphantom{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 1)}{2B_1(L+1)}}} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \Omega_{nmkj}^{**}(1) &= \frac{8}{U_\infty^2 L(m+n)} \left\{ \begin{aligned} &E\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{q=0} a_{2q,j}^{(n)} \int_{k,2q}^{**} \left(1, \frac{1}{B_1}\right) + \\ &+ \sum_{q=0} \frac{E\left(\frac{n-1}{2}\right) c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1} \left[\int_{k+2q}^{**} \left(1, \frac{1}{B_1}\right) - 1^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 1^2}} \right] + \\ &+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g_{qj}^{(n)}}{2(k+q+1)} \left[\sqrt{1-B_1^2 1^2} \sum_{t=0}^{k+q} [1+(-1)^{k+t}] 1^{k+q-t} \int_t^{**} \left(1, \frac{1}{B_1}\right) + \right. \\ &+ 2(-1)^{q+1} [1+(-1)^{k+q}] 1^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1 1)^2}{4B_1 1}} \left. \right] + \\ &+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h_{qj}^{(n)}}{2(k+q+1)} \left[\sqrt{B_1^2 L^2 - 1} \sum_{t=0}^{k+q} [1+(-1)^{k+t}] L^{k+q-t} \int_t^{**} \left(1, \frac{1}{B_1}\right) + \right. \\ &+ 2(L^{k+q+1} - 1^{k+q+1}) \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1-B_1 1)}{2B_1(L-1)}} + \quad (A-14) \\ &+ 2(-1)^{q+1} [1^{k+q+1} - (-L)^{k+q+1}] \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 1)}{2B_1(L+1)}} \left. \right] \left. \vphantom{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 1)}{2B_1(L+1)}}} \right\} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

si l'aile delta dépliée, mince ou à épaisseur symétrique, a ses bords d'attaque supersoniques.

REMARQUES

- 1 - Si on remplace, dans les constantes Ω_{nmkj} et $\Omega_{nmkj}^{(1)}$ de l'aile delta dépliée, les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$ etc... par leurs correspondants barrés on obtient les expressions des constantes $\bar{\Omega}_{nmkj}$ et respectivement $\bar{\Omega}_{nmkj}^{(1)}$.
- 2 - Si dans les constantes Ω_{nmkj}^{**} de l'aile delta pliée à épaisseur symétrique ayant ses bords d'attaque supersoniques on remplace, dans les termes qui contiennent les coefficients $g_{qj}^{(n)}$, $\sqrt{B_1^2 - 1}$ par $\sqrt{1 - B_1^2}$ on obtient les constantes Ω'_{nmkj} de l'aile delta pliée à l'épaisseur symétrique ayant ses bords d'attaque subsoniques.
- 3 - Si dans les constantes Ω_{nmkj}^{**} et $\Omega_{nmkj}^{**(1)}$ de l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique ayant les bords d'attaque supersoniques on remplace dans les termes qui contiennent les coefficients $h_{qj}^{(n)}$, $\sqrt{B_1^2 L^2 - 1}$ par $\sqrt{1 - B_1^2 L^2}$ on obtient les expressions Ω'_{nmkj} et $\Omega_{nmkj}^{(1)}$ pour l'aile delta dépliée à épaisseur symétrique ayant les bords d'attaque subsoniques.

L'utilisation de la méthode variationnelle pour
la détermination de la forme optimum de l'aile cruciforme,
en courant supersonique

R é s u m é

On détermine les formes des surfaces des ailes cruciformes symétriques, mince et à épaisseur symétrique, qui doivent être de résistance minimum pour un certain nombre Mach de croisière et qui doivent satisfaire certaines conditions de liaison qu'on est en train de préciser. Ainsi pour l'aile cruciforme symétrique mince, sont données : les projections des plaques composantes sur deux plans perpendiculaires, la portance et le moment de tangage. On suppose encore que la vitesse axiale de perturbation s'annule le long des bords d'attaque subsoniques afin d'éviter (à la vitesse de croisière) l'apparition des nappes des tourbillons en cornet.

Pour l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique sont données : les projections des plaques composantes sur deux plans perpendiculaires et le volume de l'aile.

On suppose de même que cette aile doit être aussi d'épaisseur nulle le long de ses bords d'attaque et de fuite.

Ces deux problèmes d'extrema se réduisent à la résolution de certains systèmes finis d'équations algébriques linéaires.

III. 1. Considérations générales

Les ailes cruciformes présentent une importance spéciale pour les raquettes et pour les avions à décollage vertical.

L'étude sera faite dans le cadre de la théorie linéarisée et les vitesses de perturbation perpendiculaire sur les plaques P_1 et P_2 des ailes cruciformes composantes, minces ou à épaisseur symétrique, seront exprimées sous forme de certaines superpositions des polynômes homogènes pour pouvoir utiliser les résultats de la théorie des mouvements coniques d'ordre supérieur établie par P. Germain.

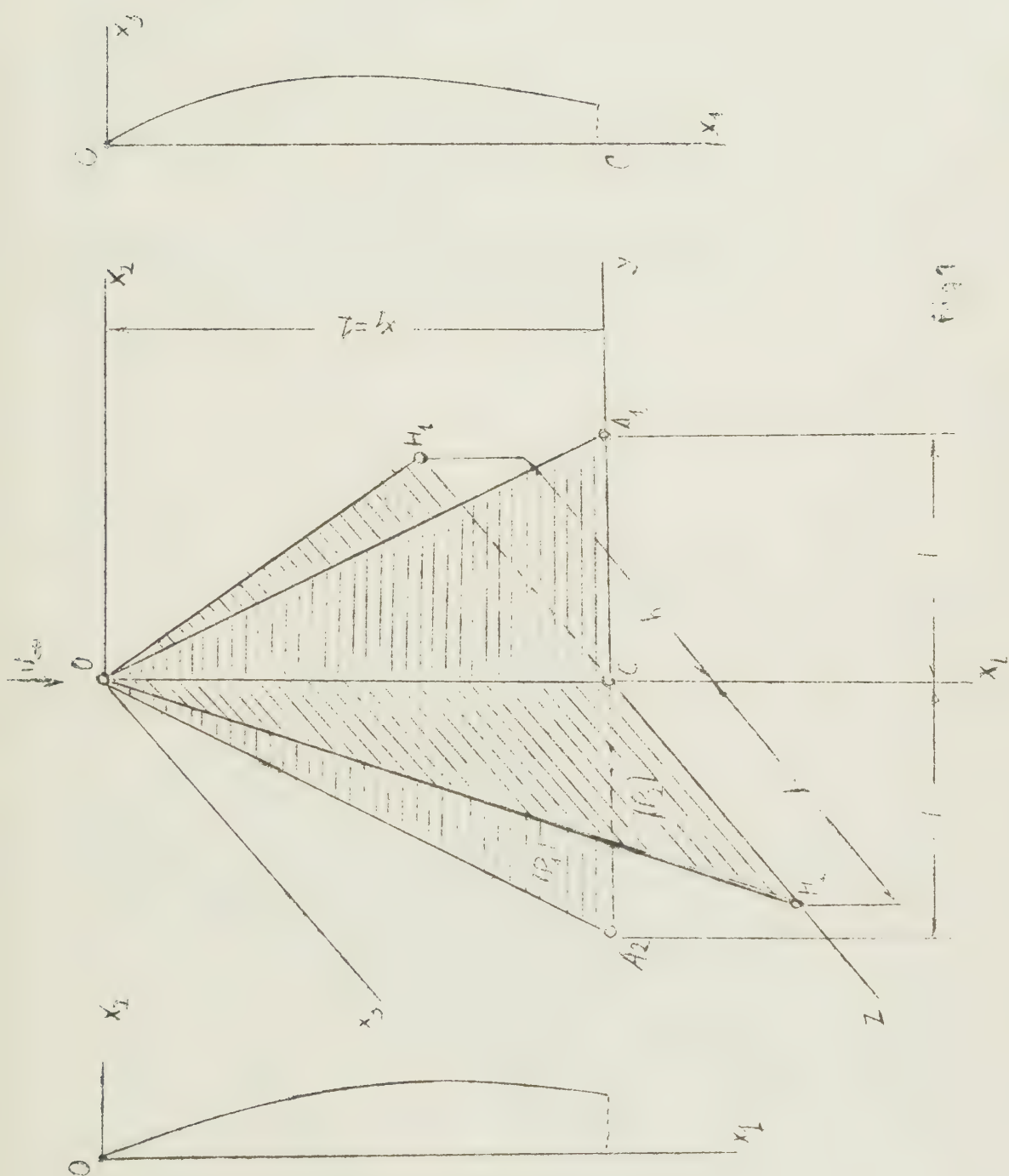
Pour trouver les formes optimales des surfaces de l'aile cruciforme mince et de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique on utilise la méthode variationnelle qui a donné auparavant pour les ailes triangulaires, mince ou à épaisseur symétrique, de résistance minimum $N. - 1$ des résultats les mieux susceptibles aux applications pratiques.

On rapporte l'aile à un système trirectangle d'axes $Ox_1x_2x_3$ ayant l'origine dans le sommet de l'aile et l'axe Ox_1 étant parallèle au courant à l'infini U_∞ (Fig. 1, 2).

On suppose que les distributions d'incidences ou d'épaisseurs des plaques composantes P_1 et P_2 des ailes cruciformes (mince ou à épaisseur symétrique) sont suffisamment petits ainsi qu'on peut supposer que la plaque P_1 est aplatie dans le plan Ox_1x_2 et l'autre plaque P_2 dans le plan Ox_1x_3 .

On suppose de même que les plaques composantes P_1 et P_2 sont respectivement symétriques par rapport aux plans de coordonnées Ox_1x_3 et Ox_1x_2 .

Fig. 1



Dans ces hypothèses on peut séparer dans le calcul des vitesses axiales des perturbations, l'effet de la portance de l'effet de l'épaisseur.

A son tour la vitesse axiale pour chacune de ces ailes composantes s'obtient par la superposition des écoulements autour des plaques P_1 et P_2 considérées séparément. Par conséquent la vitesse axiale totale $u^{(1)}$ sur la plaque (P_1) d'une des ailes cruciformes composantes (mince ou à épaisseur symétrique) s'obtient par l'addition de la vitesse "propre" $u_1^{(1)}$ qui apparaît à cause de l'écoulement autour de la plaque P_1 considérée isolée, avec la vitesse "induite" u'_1 sur la plaque P_1 à cause de l'écoulement autour de l'autre plaque P_2 considérée isolée. On peut donc écrire

$$u^{(1)} = u_1^{(1)} + u'_1$$

A cause de la symétrie des ailes cruciformes les vitesses axiales induites sont égales et de même signe sur les deux faces des plaques composantes.

Par conséquent, quand on considère seulement l'aile cruciforme à épaisseur symétrique, on doit tenir compte des vitesses propres et des vitesses induites dans l'expression de la résistance d'onde tandis que, dans le cas de l'aile cruciforme mince considérée isolément, les vitesses induites ne jouent aucun rôle dans le problème d'extremum de cette aile parce qu'elles n'ont aucune influence dans le calcul des caractéristiques aérodynamiques ainsi que dans l'effet de contournement des bords d'attaque subsoniques des ailes minces.

Dans ce qui suit nous allons étudier les deux problèmes d'extrema proposés, c'est-à-dire celle de l'aile mince et celle de l'aile à épaisseur symétrique.

II. 2. La forme optimale de l'aile cruciforme symétrique mince, en courant supersonique

On cherche donc la forme de la surface de l'aile cruciforme mince pourvue éventuellement d'une arête centrale qui doit être de résistance minimum pour un nombre Mach de croisière et pour laquelle sont donnés : la portance, le moment de tangage et les projections des plaques composantes P_1 et P_2 de l'aile cruciforme sur les plans de coordonnées Ox_1x_2 et respectivement Ox_1x_3 .

Le problème est traité dans deux hypothèses de calcul : la première, dans laquelle on suppose que la vitesse axiale est infinie le long des bords d'attaque subsoniques et que dans la résistance à l'avancement on a inclu aussi la succion et la deuxième hypothèse dans laquelle on suppose que la vitesse axiale de perturbations s'annule le long des bords d'attaque subsoniques et, à la vitesse de croisière, la succion et la tendance de formation des nappes des tourbillons en cornet disparaissent aussi.

Pour écrire sous une forme explicite ce problème d'extremum on considère plus loin que la vitesse de perturbation w parallèle à l'axe Ox_3 est exprimée, sur la plaque P_1 , par la superposition de certains polynômes homogènes w_{m-1} en x_1 et x_2 c'est-à-dire

$$w = \sum_{m=1}^N w_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} |y|^k \quad (y = \frac{x_2}{x_1}) \quad (2)$$

Similairement on considère que la vitesse de perturbation v parallèle à l'axe Ox_2 est exprimée, sur la plaque P_2 , par la superposition de certains polynômes v_{m-1} en x_1 et x_3 c'est-à-dire

$$v = \sum_{m=1}^N v_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=1}^N v_{m-k-1,k} |z|^k \quad \left(z = \frac{x_3}{x_1} \right) \quad (3)$$

Dans ces formules $w_{m-k-1,k}$ et $v_{m-k-1,k}$ sont des constantes arbitraires et $N-1$ est le degré du polynôme homogène de plus grand ordre pris en considération dans les expressions de w et v .

Les côtes Z et Y des surfaces des plaques (P_1) et (P_2) s'obtiennent en intégrant les expressions de w et respectivement de v par rapport à x_1 . On obtient ainsi

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \int w dx_1 + f(x_2) \quad (4)$$

$$Y(x_1, x_3) = \frac{1}{U_\infty} \int v dx_1 + f(x_3) \quad (5)$$

Les fonctions arbitraires $f(x_2)$ et $f(x_3)$ qui interviennent dans les expressions de Z et Y peuvent être utilisées pour satisfaire certaines conditions géométriques imposées à la surface de l'aile.

Avant d'écrire les vitesses axiales de perturbation sous une forme explicite nous allons définir les transformations géométriques et les notations utilisées. On va écrire la vitesse axiale de perturbation $u^{(1)}$ sur la plaque P_1 dans le plan complexe $x = y + iz$ qui s'obtient en partant du plan physique

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + z^2 \\ y &= \frac{x_2}{x_1} \quad z = \frac{x_3}{x_1} \\ \theta &= \arctg \frac{z}{y} \end{aligned} \quad (6)$$

et en faisant par la suite les transformations suivantes

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta \quad (7)$$

et

$$Bx = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \quad \left(\begin{array}{l} \zeta = \eta + i\xi = \rho e^{i\theta} \\ x = y + i\zeta \end{array} \right) \quad (8)$$

Le plan $\omega \eta \xi$ donné par la relation (7) représente le plan de Busemann et le plan $x = y + i\zeta$ de P. Germain défini par la relation (8) présentant la propriété de conserver en vraie grandeur la trace de la plaque P_1 sur l'axe Oy.

La plaque P_2 ($y = \eta = 0$, $x = i\zeta$) se réduit dans le plan x à la coupure $[-iH, iH]$ de l'axe Oz où

$$H = \frac{h}{\sqrt{1-B^2 h^2}} \quad (9)$$

Similairement la vitesse axiale de perturbation $u^{(2)}$ sur la plaque P_2 sera écrite dans le plan complexe $x^* = z + iy^*$ obtenu du plan $\omega \eta \xi$ défini par la relation (7) à l'aide de la formule suivante

$$Bx^* = - \frac{2i\zeta}{1-\zeta^2} \quad (10)$$

Le plan x^* conserve la trace de la plaque P_2 sur l'axe Oy en vraie grandeur ($y^* = \xi = 0$, $x^* = z$) et la trace de la plaque P_1 est la coupure $[-iL, iL]$ de l'axe Oy^* où

$$L = \frac{1}{\sqrt{1-B_1^2}} \quad (11)$$

Parce que les vitesses induites ne jouent aucun rôle dans le problème d'extremum de l'aile mince on va donner seulement les expressions des vitesses axiales de perturbation propres. On a ainsi pour la vitesse axiale propre $u_1^{(1)}$ sur la plaque P_1 considérée isolée, des expressions similaires avec celles données auparavant pour l'aile delta munie éventuellement avec une arête centrale OC [C.9.-N8] c'est-à-dire

$$u_1^{(1)} = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{A_{n,2q} y^{2q}}{\sqrt{B^2(1^2 - y^2)}} + \sum_{q=1}^{E(\frac{n-1}{2})} C_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1^2}{y^2}} \right\} \quad (12)$$

si la plaque P_1 a ses bords d'attaque subsoniques et respectivement

$$u_1^{(1)} = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} H_{nq} y^q \left[\arccos \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-By)}{2B(1-y)}} + (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+By)}{2B(1+y)}} \right] + \sum_{q=1}^{E(\frac{n-1}{2})} C_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 y^2}} + \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} P_{n,2q} y^{2q} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{B^2 y^2}}} \right\} \quad (13)$$

si la plaque P_1 a ses bords d'attaque supersoniques.

Similairement les expressions de la vitesse axiale propre $u_2^{(2)}$ sur la plaque P_2 considérée isolée s'obtient en faisant dans les formules correspondantes de $u_1^{(1)}$ sur la plaque P_1 les remplacements sui-

vants $x \rightarrow x^*$, $1 \rightarrow h$ et les constantes $A_{n,2q}$, $C_{n,2q}$ etc... par d'autres constantes correspondantes $\bar{A}_{n,2q}$, $\bar{C}_{n,2q}$ etc... On obtient ainsi

$$u_2^{(2)} = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{\bar{A}_{n,2q} z^{2q}}{\sqrt{B^2(h^2 - z^2)}} + \sum_{q=1}^{E(\frac{n-1}{2})} \bar{C}_{n,2q} z^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{h^2}{z^2}} \right\} \quad (14)$$

si la plaque P_2 a ses bords d'attaque subsoniques et

$$u_2^{(2)} = \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=1}^{n-1} \bar{H}_{nq} z^q \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bz)}{2B(h-z)}} + (-1)^q \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bz)}{2B(h+z)}} \right] + \sum_{q=1}^{E(\frac{n-1}{2})} \bar{C}_{n,2q} z^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 z^2}} + \sum_{q=0}^{E(\frac{n}{2})} \bar{P}_{n,2q} z^{2q} \frac{1}{\sqrt{1-B^2 z^2}} \right\} \quad (15)$$

si la plaque P_2 a ses bords d'attaque supersoniques.

Les coefficients des vitesses axiales de perturbation $u_1^{(1)}$ sont reliés aux coefficients $w_{n-j-1,j}$ de w et les coefficients des vitesses axiales $u_2^{(2)}$ sont reliés aux coefficients $v_{n-j-1,j}$ de v par des relations linéaires et homogènes déduites des conditions de compatibilité de P. Germain [G.-1]. On peut donc écrire

$$A_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (16)$$

etc...

et

$$\bar{A}_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_{2q,j}^{(n)} v_{n-j-1,j} \quad (17)$$

etc...

Les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$, $h_{q,j}^{(n)}$ etc... dépendent du nombre Mach M de croisière et de la projection dans le plan de la plaque (P_1) et les coefficients $\bar{a}_{2q,j}^{(n)}$, $\bar{c}_{2q,j}^{(n)}$, $\bar{h}_{q,j}^{(n)}$ etc... dépendent du nombre Mach M et de la projection dans le plan de la plaque (P_2) . Ces coefficients sont donc des constantes dans le problème d'extremum considéré.

Maintenant on peut expliciter les relations de liaison et les caractéristiques aérodynamiques de l'aile cruciforme mince. A cause de la symétrie de l'aile cruciforme par rapport aux plans Ox_1x_3 et Ox_1x_2 , toutes ces relations s'écrivent seulement sur les demi-plaques de l'aile cruciforme.

La condition de continuité de la surface de l'aile le long de l'arête centrale est automatiquement satisfaite à cause de la symétrie de l'aile par rapport aux plans Ox_1x_2 et Ox_1x_3 .

b) La condition de l'annulation de la vitesse axiale le long des bords d'attaque subsoniques, en vue d'éviter la formation des nappes des tourbillons en cornet à la vitesse de croisière peut s'écrire sur les deux bords d'attaque subsoniques OA_1 et OH_1 des demi-plaques sous la forme

$$F_n \equiv \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}^{(n)} 1^{2q} w_{n-j-1,j} = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_{nj} w_{n-j-1,j} = 0 \quad (18)$$

$$(n = 1, 2 \dots N)$$

et

$$\bar{F}_n \equiv \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_{2q,j}^{(n)} h^{2q} v_{n-j-1,j} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\psi}_{nj} v_{n-j-1,j} = 0 \quad (19)$$

$$(n = 1, 2 \dots N)$$

Si les bords des plaques (P_1) et (P_2) sont supersoniques ces conditions disparaissent.

c) La portance de l'aile cruciforme s'obtient avec une de ces relations

$$C_1 = \frac{8}{1 U_\infty} \int_{O \in A_1} u^{(1)} x_1 dx_1 dy \quad (20)$$

si l'aile glisse sur la plaque P_1 et respectivement

$$C'_1 = \frac{8}{h U_\infty} \int_{O \in H_1} u^{(2)} x_1 dx_1 dz \quad (21)$$

si l'aile glisse sur la plaque P_2 .

La condition que la portance de l'aile cruciforme mince soit donnée prend donc une de ces deux formes :

$$C_1 \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = C_{10} \quad (22)$$

et respectivement

$$C'_{11} \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\Lambda}_{nj} v_{n-j-1,j} = C'_{10} \quad (23)$$

d) Similairement la condition que le moment de tangage soit donné prend l'une de ces deux formes

$$\begin{aligned} C_m &\equiv \frac{8}{U_\infty^2} \int_{OA_1C} u^{(1)} x_1^2 dx_1 dy = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = C_{m0} \end{aligned} \quad (24)$$

si l'aile cruciforme glisse sur la plaque P_1 et respectivement

$$C'_m \equiv \frac{8}{U_\infty^2 h} \int_{OH_1C} u^{(2)} x_1^2 dx_1 dz = \quad (25)$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} \bar{\Lambda}_{nj} v_{n-j-1,j} = C'_{m0}$$

si l'aile glisse sur la plaque P_2 .

e) L'expression du coefficient de résistance d'onde devient :

$$\begin{aligned} C_d &\equiv \frac{8}{U_\infty^2(1+h)} \left[\int_{OA_1C} w u x_1 dx_1 dy + \int_{OH_1C} v u x_1 dx_1 dz \right] = \quad (26) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Omega}_{nmkj} v_{n-j-1,j} v_{m-k-1,k} \right] \end{aligned}$$

f) Finalement l'expression du coefficient de succion est de la forme

$$\sigma = - \frac{4 \pi}{U_{\infty}^2 (1+h)^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{m+n} \left\{ \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-B_1^2}}{1} (1-y) u_{m-1}(y) u_{n-1}(y) + \right. \\ \left. + \lim_{z \rightarrow h} \frac{\sqrt{1-B_h^2}}{h} (h-z) u_{m-1}(z) u_{n-1}(z) \right\} = \quad (27)$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\Delta_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \bar{\Delta}_{nmkj} v_{m-k-1,k} v_{n-j-1,j} \right]$$

si tous les quatre bords d'attaque sont subsoniques. Si l'une des plaques composantes a les bords d'attaque supersoniques, leurs contributions disparaissent de l'expression (27). Si les deux plaques ont les bords d'attaque supersoniques, $\sigma = 0$.

Dans les relations (21)-(26) Λ_{nj} , Ω_{nmkj} , Δ_{nmkj} etc... sont des constantes dans le problème d'extremum et sont données dans l'annexe.

La résolution du problème d'extremum de l'aile cruciforme mince se réduit donc à la détermination des valeurs des coefficients $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ qui interviennent dans les expressions de w et v de telle sorte que

$$C_d + \sigma = \text{minim.} \quad (28)$$

avec les conditions de liaisons suivantes

$$C_1 = \text{const.}, \quad C'_1 = \text{const.}, \quad C_m = \text{const.}, \quad C'_m = \text{const.} \quad (29)$$

$$F_t = 0, \quad \bar{F}_t = 0 \quad (t=1, 2, \dots, N)$$

le problème d'extremum avec liaisons se réduit au calcul d'extremum sans liaisons de l'expression de Hamilton

$$H = C_d + \sigma + \lambda^{(1)} C_1 + \lambda^{(2)} C_m + \mu^{(1)} C'_1 + \mu^{(2)} C'_m + \sum_{t=1}^N [\mu_t F_t + \bar{\mu}_t \bar{F}_t] \quad (30)$$

où $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, μ_t et $\bar{\mu}_t$ sont les multiplicateurs de Lagrange.

L'extremum de H s'obtient à son tour si on annule sa première variation ($\delta H = 0$).

A cause du fait que les coefficients $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ sont indépendants par l'annulation des coefficients de toutes les variations

$\delta w_{\theta\sigma}$, on obtient des équations de la forme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[\Omega_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \Omega_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma} + \Delta_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \Delta_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma} \right] w_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \left(\lambda^{(1)} + \frac{\theta + \sigma + 2}{\theta + \sigma + 3} \lambda^{(2)} \right) \Lambda_{\theta + \sigma + 1, \sigma} = 0 \quad (31)$$

$$\mu_{\theta + \sigma + 1} \psi_{\theta + \sigma + 1, \sigma} = 0$$

et similairement des équations de la forme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[\bar{\Omega}_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \bar{\Omega}_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma} + \bar{\Delta}_{n, \theta + \sigma + 1, \sigma, j} + \bar{\Delta}_{\theta + \sigma + 1, n, j, \sigma} \right] \bar{w}_{\theta + \sigma + 1, \sigma} + \left(\bar{\lambda}^{(1)} + \frac{\theta + \sigma + 2}{\theta + \sigma + 3} \bar{\lambda}^{(2)} \right) \bar{\Lambda}_{\theta + \sigma + 1, \sigma} = 0$$

$$+ \Delta_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma} \left[v_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \left(\mu^{(1)} + \frac{\theta+\sigma+2}{\theta+\sigma+3} \mu^{(2)} \right) \bar{h}_{\theta+\sigma+1,\sigma} \right. \\ \left. + \bar{\mu}_{\theta+\sigma+1} \bar{\psi}_{\theta+\sigma+1,\sigma} \right] = 0 \quad (32)$$

$$(\theta, \sigma) = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N$$

si on annule les coefficients des variations $\delta v_{\theta\sigma}$.

Les équations (30) (31) et (28) forment un système linéaire fini d'équations algébriques qui fournit les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ ainsi que les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, μ_t et $\bar{\mu}_t$.

Le problème de résistance minimum de l'aile cruciforme mince peut être considéré maintenant comme résolu.

Observations finales

a) Si dans le système final considéré on élimine les conditions de l'annulation de la vitesse axiale le long de ses bords d'attaque subsoniques et si on prend $\mu_t = \bar{\mu}_t = 0$ on obtient la solution du problème d'extremum dans la première hypothèse de calcul (l'incidence étant petite on considère la succion et on néglige l'effet de la formation des nappes des tourbillons en cornet).

b) Par contre si on prend dans le système final $\Delta_{nmkj} = \bar{\Delta}_{nmkj} = 0$ c'est-à-dire on annule la succion on se trouve dans la seconde hypothèse de calcul.

c) Si dans les équations du système on annule la contribution d'une des plaques (P_2) de l'aile cruciforme c'est-à-dire on fait $v_{n-j-1,j} = 0$ et $h = 0$ on obtient de nouveau le système qui a fourni l'aile delta mince, pourvue d'une arête centrale de résistance minimum.

Ce qui est plus intéressant c'est le fait que réciproquement du système obtenu antérieurement pour l'aile delta mince de résistance minimum pourvue d'une arête centrale qui sépare deux distributions différentes de vitesses verticales de perturbation dénotées par w et $\bar{w}$ on peut obtenir, du point de vue formel, le système qui donne l'aile cruciforme mince de résistance minimum si on annule tous les termes d'interférence entre les distributions de w et $\bar{w}$ dans les expressions de la résistance d'onde et de la succion et on remplace après les coefficients de $\bar{w}$ avec les coefficients de v .

On peut dire que, du point de vue formel, la seconde plaque (P_2) de l'aile cruciforme joue, dans le problème de résistance minimum de cette aile, le même rôle d'une arête centrale sur l'aile delta mince isolée de résistance minimum qui doit satisfaire les mêmes conditions de liaison que l'aile cruciforme considérée.

On va passer maintenant à l'étude de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique de résistance minimum.

III. 3. La forme optimale de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique, en courant supersonique

On doit donc maintenant déterminer la forme de la surface d'une aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique qui doit être de résistance minimum et qui a les projections des plaques composantes (P_1) et (P_2) sur deux plans perpendiculaires et le volume de l'aile cruciforme

donnés à l'avance. De même l'aile cruciforme d'épaisseur symétrique et supposée d'épaisseur nulle le long de ses bords d'attaque et de fuite. Comme dans le cas de l'aile cruciforme mince on suppose que l'aile est symétrique par rapport aux planes de coordonnées Ox_1x_3 et Ox_1x_2 , et par conséquent, toutes les conditions de liaisons seront mises sur les demi-plaques de l'aile.

Comme dans le cas de l'aile cruciforme mince la vitesse de perturbation w , parallèle à l'axe Ox_3 , est exprimée sur la plaque P_1 de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique sous la forme d'une superposition de certains polynômes homogènes en x_1 et x_2 :

$$w = \sum_{m=1}^N w_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} |y|^k \quad \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right) \quad (33)$$

et similairement sur la plaque (P_2) de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique on exprime la vitesse v parallèle à l'axe Ox_2 sur la plaque (P_2) sous la forme d'une superposition de certains polynômes homogènes en x_1 et x_3 :

$$v = \sum_{m=1}^N v_{m-1} = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} v_{m-k-1,k} |z|^k \quad \left(z = \frac{x_3}{x_1}\right) \quad (34)$$

Dans ces formules $w_{m-k-1,k}$ et $v_{m-k-1,k}$ sont des constantes arbitraires et $N-1$ est le degré du polynôme de plus grand ordre pris en considération dans les expressions de w et v .

Les équations Z et Y des extrados des plaques P_1 et P_2 s'obtiennent par l'intégration des expressions de w et respectivement de v par rapport à x_1 :

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \int w dx_1 + f_1(x_2) \quad (35)$$

et

$$Y(x_1, x_3) = \frac{1}{U_\infty} \int v dx_1 + f_2(x_3) \quad (36)$$

Dans ces formules $f_1(x_2)$ et $f_2(x_3)$ sont des fonctions arbitraires de x_2 et x_3 .

a) On détermine ces fonctions de la condition que l'aile soit d'épaisseur nulle le long des bords de fuite des plaques (P_1) et (P_2) ($x_1 = 1$; $Z = 0$, $Y = 0$).

On obtient ainsi les expressions suivantes des surfaces Z et Y des extrados des plaques P_1 et P_2

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,k} |x_2|^k}{m-k} [x_1^{m-k-1}] \quad (37)$$

et

$$Y(x_1, x_3) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \frac{v_{m-k-1,k} |x_3|^k}{m-k} [x_1^{m-k-1}] \quad (38)$$

et la condition que l'aile soit d'épaisseur nulle le long des bords de fuite n'intervient plus parmi les conditions de liaison du problème d'extremum proposé.

b) La condition que le volume de l'aile cruciforme soit donné ($V = V_0$) devient :

$$\begin{aligned} V &= 2 \left[\int_{OA_1C} Z dx_1 dx_2 + \int_{OH_1C} Y dx_1 dx_3 \right] = \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \left(\tau_{mk} w_{m-k-1,k} + \bar{\tau}_{mk} v_{m-k-1,k} \right) = V_0 \end{aligned} \quad (39)$$

où on a noté par τ_{mk} et $\bar{\tau}_{mk}$ les constantes

$$\text{et } \tau_{mk} = -2 \frac{l^{k+1}}{U_{\infty} (k+1)(k+2)(m+2)} \quad (40)$$

et

$$\bar{\tau}_{mk} = -2 \frac{h^{k+1}}{U_{\infty} (k+1)(k+2)(m+2)} \quad (41)$$

c) La condition que l'aile cruciforme soit d'épaisseur nulle sur le bord OA_1 de la plaque (P_1) ($y=1, Z=0$) devienne :

$$E_t \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{m-1} d_{mk}^{(t)} w_{m-k-1,k} = 0 \quad (42)$$

$$t = 0, 1, \dots (N-1)$$

où les constantes $d_{mk}^{(t)}$ sont les suivantes

$$d_{mk}^{(t)} = \frac{l^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \quad (43)$$

et δ_i^j est le symbole de Kroenecker.

d) Similairement la condition que l'aile cruciforme soit d'épaisseur nulle sur le bord d'attaque OH_1 de la plaque (P_2) ($z=h, Y=0$) conduit aux relations :

$$\bar{E}_t \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \bar{d}_{mk}^{(t)} v_{m-k-1,k} = 0 \quad (44)$$

$$t = 0, 1, \dots (N-1)$$

où

$$\bar{d}_{mk} = \frac{h^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \quad (45)$$

sont des constantes.

Maintenant il est nécessaire de donner la vitesse axiale de perturbation sous une forme explicite afin de pouvoir calculer la résistance d'onde de l'aile à épaisseur symétrique.

Comme dans le cas de l'aile cruciforme symétrique mince on peut aussi obtenir l'écoulement autour de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique par la superposition des écoulements autour des plaques (P_1) et (P_2) considérées isolées.

Par conséquent la vitesse axiale de perturbation sur l'une des plaques (P_1) de l'aile cruciforme, dénotée par $u^{(1)}$ s'obtient aussi par la superposition de la vitesse axiale de perturbation propre, $u_1^{(1)}$ due à l'écoulement autour de la plaque P_1 considérée isolée, et la vitesse axiale de perturbation u'_1 induite sur la plaque par l'écoulement autour de la plaque P_2 considérée isolée.

Mais si la vitesse induite ne joue aucun rôle dans le problème de résistance minimum de l'aile cruciforme symétrique mince, dans le cas de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique la vitesse axiale de perturbation tout entière intervient dans l'expression de la résistance à l'avancement de l'aile cruciforme.

La vitesse axiale de perturbation propre sur la plaque P_1 a la même expression que celle donnée auparavant [C.7-I.3 [N.-1]] pour l'aile delta à épaisseur symétrique isolée pourvue d'une arête centrale. Si la plaque P_1 a les bords d'attaque subsoniques on a ainsi sur cette plaque

($x = \eta = y$, $z = 0$) l'expression

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1)} = & \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} H_{nq} x_1^q \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-Bx)}{2B(1-x)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+Bx)}{2B(1+x)}} \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n,2q} x_1^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} + \sum_{q=0}^{\frac{n-2}{2}} D_{n,2q} x_1^{2q} \sqrt{\frac{1-B^2 x^2}{B^2}} \right\}
 \end{aligned} \quad (46)$$

Observations

1) Si les bords d'attaque de la plaque P_1 sont supersoniques alors on doit remplacer dans les deux premiers termes (qui représentent la contribution des bords d'attaque de la plaque P_1 dans l'expression de $u_1^{(1)}$) "argch" par "arccos".

2) La vitesse axiale de perturbation propre $u_2^{(2)}$ sur l'autre plaque P_2 , s'obtient en remplaçant dans l'expression (46) de $u_1^{(1)}$ 1 avec h , x avec x^* et les constantes H_{nq}, C_{nq} etc...; par d'autres constantes $\bar{H}_{nq}, \bar{C}_{nq}$ etc..., on a ainsi

$$\begin{aligned}
 u_2^{(2)} = & \mathcal{R} e \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} H_{nq}^* x_1^{*q} \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bx^*)}{2B(h-x^*)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bx^*)}{2B(h+x^*)}} \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}} \bar{C}_{n,2q} x_1^{*2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^{*2}}} + \sum_{q=0}^{\frac{n-2}{2}} \bar{D}_{n,2q} x_1^{*2q} \sqrt{\frac{1-B^2 x^{*2}}{B^2}} \right\}
 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2} \right) C_{n,2q}^* x^{*2q} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2 x^{*2}}} + \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{n-2}{2} \right) D_{n,2q} x^{*2q} \sqrt{\frac{1-B^2 x^{*2}}{B^2}} \end{aligned} \right\}$$

3) La vitesse de perturbation u_1' induite sur la plaque P_1 par l'écoulement autour de la plaque P_2 ne peut pas être obtenue automatiquement de l'expression (47) simplement par particularisation parce que, pour la déduction de cette formule de $u_2^{(2)}$, dans le cas de l'aile delta à épaisseur symétrique isolée, on a déterminé premièrement l'expression d'un potentiel complexe fictif, par la voie de l'analogie hydrodynamique où on a noté :

$$\mathcal{R}_e F_{n-q,q,0} = \Phi_{n-q,q,0} = \frac{\partial^n \phi}{\partial x_1^{n-q} \partial x_2^q \partial x_3^0} \quad (48)$$

Φ étant le potentiel de mouvement, et ensuite on a déduit de l'expression de $F_{n-q,q,0}$ à l'aide des relations d'homogénéité de Euler écrites pour les fonctions homogènes d'ordre $(n-1)$ mais dans lesquelles on a fait auparavant la particularisation $z = \frac{x_3}{x_1} = 0$

On peut donc partir de l'expression $F_{n-q,q,0}$ données auparavant [C.17-M.3-N16] pour l'aile delta à épaisseur symétrique pourvue d'une arête centrale

$$\begin{aligned} F_{n-q,q,0} = & g \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-Bx)}{2B(1-x)}} + \\ & + h \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+Bx)}{2B(1+x)}} + c \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2 x^2}} \end{aligned} \quad (49)$$

$$+ \sqrt{1-B^2 x^2} \sum_{p=0}^{n-q} \left(\frac{c_p x^p}{x^{n-1}} + \frac{g_p x^p}{(1-x)^{n-1}} + \frac{h_p x^p}{(1+x)^{n-1}} \right)$$

et ensuite, en tenant compte des relations de compatibilité de Euler écrite sous une forme particulière données auparavant [C.6-H.9] dans laquelle on a remplacé toutes les fonctions $F_{n-q,q,0}$ avec une seule F_{noo} en utilisant les relations de compatibilité de P. Germain, on obtient la formule suivante pour la déduction de la vitesse induite u'_2 sur la plaque P'_2 .

$$u'_2 = R e \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{c_{n-1}^q}{(n-1)!} \left(- \frac{x}{\sqrt{1-B^2 x^2}} \right)^q \int \left(\frac{\sqrt{1-B^2 x^2}}{x} \right)^q d F_{noo} \quad (50)$$

Si dans cette dernière formule on tient compte que :

1) toutes les fonctions $F_{n,q,q,0}$ doivent être analytiques dans l'origine, c'est-à-dire des relations de compatibilité de P. Germain écrites entre les fonctions $F_{n-q,q,0}$

$$d F_{noo} = (-x)^q d F_{n-q,q,0} = (-x)^n d F_{ono} \quad (51)$$

donc la fonction $d F_{noo}$ doit se diviser par x^n ;

2) la vitesse axiale de perturbation u'_2 d'influence doit être symétrique en x ;

3) on applique le principe de la singularité minime, on obtient à l'aide de (50) la formule suivante, pour la vitesse d'influence de l'écoulement autour de la plaque P_1 sur la plaque P_2 :

$$u'_2 = R e \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{x^{2q}}{(1-B^2 x^2)^q} \left\{ H'_{n,2q} \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx)(1-Bx)}{2B(1-x)}} \right] + \right. \quad (52)$$

$$+ \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+Bx)}{2B(1+x)}} \Bigg] + (1-\delta_q^0) C'_{n,2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{\frac{2}{B} x^2}} +$$

$$+ \left. \frac{D'_{n,2q}}{\sqrt{1-Bx^2}} + K'_{n,2q} \frac{x}{\sqrt{1-Bx^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} \right\}$$

et on doit ensuite faire aussi $x = 1$ et $y = \eta = 0$ pour se trouver sur la plaque P_2 .

Similairement la vitesse u'_1 induite sur la plaque P_1 par l'écoulement autour de la plaque P_2 considérée isolée, s'obtient en partant des relations de Euler et en tenant compte aussi des relations de compatibilité de P. Germain:

$$u'_1 = R e \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^q}{(n-1)!} x^{*q} \int \frac{dF_{\infty 0}}{x^{*q}} \quad (53)$$

Si on tient compte maintenant des mêmes considérations que dans l'établissement de la formule (52) de u'_2 on obtient pour la vitesse de perturbation u'_1 induite sur la plaque P_1 l'expression

$$u'_1 = R e \sum_{n=1}^N x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{x^{*2q}}{(1-B^2 x^{*2})^q} \left\{ H_{n,2q}^{**} \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bx^*)}{2B(h-x^*)}} + \right. \right.$$

$$+ \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bx^*)}{2B(h+x^*)}} \Bigg) + (1-\delta_q^0) C_{n,2q}^{**} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2 x^{*2}}} +$$

$$+ \left. \frac{D_{n,2q}^{**}}{\sqrt{1-B^2 x^{*2}}} + K_{n,2q}^{**} \frac{x^*}{\sqrt{1-B^2 x^{*2}}} \ln \frac{h+x^*}{h-x^*} \right\} \quad (54)$$

où on doit faire encore $\bar{x}^* = iy$ et $\eta = z = 0$ pour se trouver sur cette plaque. Les constantes H_{nq} , H_{nq}^* , H'_{nq} etc... sont liées aux constantes $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ de w et v par des relations linéaires déduites des relations de compatibilité de P. Germain. On peut donc écrire :

$$H_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(h_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{h}_{qj}^{(n)} v_{n-j-1,j} \right) \quad (55-a)$$

$$H_{nq}^* = \sum_{j=0}^{n-1} \left(h_{qj}^{*(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{h}_{qj}^{*(n)} v_{n-j-1,j} \right) \quad (55-b)$$

$$H'_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(h'_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{h}'_{qj}^{(n)} v_{n-j-1,j} \right) \quad (55-c)$$

$$H_{nq}^{**} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(h_{qj}^{**(n)} w_{n-j-1,j} + \bar{h}_{qj}^{**(n)} v_{n-j-1,j} \right) \quad (55-d)$$

Le coefficient de résistance d'onde de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique est de la forme

$$C_d = \frac{8}{U_\infty^2 (1+h)} \left[\int_{OA_1C} w^2 x_1 dx_1 dy + \int_{OH_1C} v^2 x_1 dx_1 dz \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\Omega_{nmkj} w_{n-j-1,j} w_{m-k-1,k} + \right. \quad (56)$$

$$+ \Omega_{nmkj}^{(1)} w_{n-j-1,j} v_{m-k-1,k} + \bar{\Omega}_{nmkj} v_{n-j-1,j} w_{m-k-1,k} +$$

$$+ \bar{\Omega}_{nmkj}^{(1)} v_{n-j-1,j} v_{m-k-1,k} \left. \right]$$

Les expressions etc... sont des constantes données dans l'annexe.

Maintenant on peut passer à la résolution du problème d'extremum proposé.

On doit donc déterminer les valeurs des coefficients $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ de w et v de telle sorte que

$$C_d = \text{minimum}$$

avec les conditions de liaisons :

$$V = V_0 \quad E_t = 0 \quad \bar{E}_t = 0 \quad (57)$$

$$t = 0, 1 \dots (N-1)$$

Ce problème d'extremum avec liaisons se réduit au calcul d'extremum sans liaisons de l'expression de Hamilton

$$H = C_d + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{N-1} (\lambda_t E_t + \bar{\lambda}_t \bar{E}_t) \quad (58)$$

où $\lambda^{(0)}$, λ_t et $\bar{\lambda}_t$ sont les multiplicateurs de Lagrange.

L'extremum de H s'obtient si on annule sa première variation

($\delta H = 0$). Si on tient compte aussi que $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ sont indépendants par l'annulation des coefficients de chacune des variations

$\delta w_{\theta \sigma}$ et $\delta v_{\theta \sigma}$ on obtient respectivement des équations de la forme :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[(\Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Omega_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) w_{n-j-1,j} + \right. \\ \left. + (\Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Omega_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)}) v_{n-j-1,j} \right] + \\ + \sum_{t=0}^{N-1} \lambda_t d_{\theta+\sigma+1,\sigma}^{(t)} + \lambda^{(0)} \tau_{\theta+\sigma+1,\sigma} = 0 \quad (59)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left(\bar{\Omega}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} \right) w_{n-j-1,j} + \\
 & + \left(\bar{\Omega}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(1)} + \bar{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(1)} \right) v_{n-j-1,j} \Bigg] + \\
 & + \sum_{t=0}^{N-1} \bar{\lambda}_t \bar{\tau}_{\theta+\sigma+1,\sigma}^{(t)} + \lambda \bar{\tau}_{\theta+\sigma+1,\sigma}^{(0)} = 0
 \end{aligned} \tag{60}$$

$$\theta, \sigma = 0, 1, \dots, (N-1) \quad 1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N$$

Ces équations et les relations (57) forment ensemble un système linéaire fini d'équations algébriques qui fournit les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1,j}$ et $v_{n-j-1,j}$ et les valeurs des multiplicateurs $\lambda^{(0)}$, λ_t , $\bar{\lambda}_t$. Le problème variationnel de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique peut être aussi considéré comme résolu.

Remarques finales

a) Si on annule dans ce système la contribution d'une plaque $\{P_2\}$ de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique c'est-à-dire on fait $v_{m-k-1,k}=0$ et $h=0$ on obtient exactement le système établi auparavant [N.-1] et qui fournit les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1,j}$ d'une aile delta isolée à épaisseur symétrique isolée pourvue d'une arête centrale

b) Réciproquement, le système qui donne les valeurs optimales des coefficients $w_{m-k-1,k}$ et $v_{m-k-1,k}$ de l'aile cruciforme symétrique à épaisseur symétrique, peut être obtenu du point de vue formel du système obtenu antérieurement pour les valeurs optimales des coefficients $w_{m-k-1,k}$ et $v_{m-k-1,k}$ d'une aile delta isolée à épaisseur symétrique pourvue d'une arête centrale qui sépare les distributions de vitesses verticales w et

$\bar{w}$ en remplaçant simplement les coefficients $\bar{w}_{n-j-1,j}$ par les coefficients $v_{n-j-1,j}$. Naturellement les valeurs des constantes Ω_{nmkj} sont différentes dans les deux cas et à cause de cela le résultat obtenu est dénommé formel.

On peut dire donc que dans le problème de l'optimisation de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique la seconde plaque (P_2) joue du point de vue formel le rôle d'une arête centrale de séparation de deux distributions de vitesses vorticales sur une aile delta isolée à épaisseur symétrique, qui doit satisfaire les mêmes conditions de liaison que l'aile cruciforme considérée.

c) On a maintenant les formes optimales des ailes cruciformes symétriques minces et à épaisseur symétrique.

Si les projections des plaques composantes de ces ailes sur deux plans perpendiculaires sont les mêmes, peut-on, par simple addition, obtenir la forme optimale d'une aile cruciforme symétrique épaisse-portante ? Autrement dit, peut-on obtenir la forme optimale de cette aile avec l'aile cruciforme mince comme squelette et avec la même distribution d'épaisseur que l'aile cruciforme à épaisseur symétrique comme dans le cas de l'aile delta épaisse-portante ?

En étudiant ce problème on a obtenu une réponse presque affirmative. On doit prendre une seule précaution qui consiste dans l'addition des vitesses axiales de perturbation d'influence u'_1 et u'_2 qui apparaissent sur les plaques composantes de l'aile cruciforme mince aux vitesses totales de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique et par conséquent en modifiant l'expression de la résistance d'onde de l'aile à épaisseur symétrique.

Finalement l'aile cruciforme épaisse-portante optimale à l'aile cruciforme mince optimale déterminée auparavant comme squelette, mais la distribution d'épaisseur de cette aile se modifie en comparaison avec celle donnée de l'aile cruciforme optimale à épaisseur symétrique compte tenu

des vitesses axiales d'influence de l'aile cruciforme mince, et qui ont le caractère des vitesses axiales qui apparaissent sur les ailes à épaisseur symétrique c'est-à-dire sont égales et de même signe sur les deux faces de l'aile sur laquelle elles prennent naissance.

III. 4. ANNEXE DE CALCUL

Comme dans $\left[N. - 1 \right]$ on dénote par $I_k (1)$ l'intégrale indéfinie

$$\begin{aligned}
 I_k (1) &= \int \frac{y^k dy}{\sqrt{B^2(1^2 - y^2)}} = -\frac{y^{k-1}}{k B} \sqrt{B^2(1^2 - y^2)} + \frac{(k-1)1^2}{k} I_{k-2}(1) = \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j k! (2j)! 1^{k-j}}{(j!)^3 (k-j)! B} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^j \arcsin \frac{y}{1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{B^2(1^2 - y^2)}}{B} \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2 1^{v-1}}{(2j-2v+1)! 2^v} (1-y)^{j-v} \right] \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

En faisant $1 = \frac{1}{B}$ on obtient $I_k^{**} \left(\frac{1}{B} \right)$

$$\begin{aligned}
 I_k^{**} \left(\frac{1}{B} \right) &= \int \frac{y^k dy}{\sqrt{1-B^2 y^2}} = \frac{k-1}{k B^2} I_{k-2}^{**} \left(\frac{1}{B} \right) = \\
 &= \sum_{v=1}^k \frac{(-1)^j (2j)! k!}{(j!)^3 (k-j)! B^{k+1}} \left[\frac{\pi}{2^{j+1}} - \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2}{2^v (2j-2v+1)!} \right] \quad (A-2)
 \end{aligned}$$

De ces deux intégrales on obtient les intégrales définies suivantes

$$\begin{aligned}
 J_k^{(0,1)} &= \int_0^1 \frac{y^k dy}{\sqrt{B^2(1-y^2)}} = \frac{k-1}{k} B^{1/2} J_{k-2}^{(0,1)} = \\
 &= \frac{k! B^{1/2}}{B} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (2j)!}{(j!)^3 (k-j)!} \left[\frac{\pi}{2^{j+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2}{(2j-2v+1)! 2^v} \right] \quad (A-3)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_k^{**}(0,1) &= \int_0^1 \frac{y^k dy}{\sqrt{1-B^2 y^2}} = - \frac{1^{k-1}}{k B^2} \sqrt{1-B^2} + \\
 &+ \frac{k-1}{k B^2} J_{k-2}^{**}(0,1) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (2j)! k!}{(j!)^3 (k-j)! B^{k+1}} \left\{ \frac{1}{2^j} \arcsin B - \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2}{2^v (2j-2v+1)!} [1 - (1-B)^{j-v} \sqrt{1-B^2}] \right\} \quad (A-4)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_k^{**}(0, \frac{1}{B}) &= \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^k dy}{\sqrt{1-B^2 y^2}} = \frac{k-1}{k B^2} J_{k-2}^{**}(0, \frac{1}{B}) = \\
 &= \sum_{v=1}^k \frac{(-1)^j (2j)! k!}{(j!)^3 (k-j)! B^{k+1}} \left[\frac{\pi}{2^{j+1}} - \sum_{v=1}^j \frac{[(j-v)!]^2}{2^v (2j-2v+1)!} \right] \quad (A-5)
 \end{aligned}$$

Avec ces notations on obtient les constantes Λ_{nj} qui interviennent dans le problème d'extremum de l'aile cruciforme mince. On a ainsi

$$\Lambda_{nj} = \frac{8}{1 U_{\infty}(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)} \int_{2q}^{(0,1)} + \right. \\ \left. + B1 \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{2q+1} \int_{2q}^{(0,1)} \right\} \quad (A-6)$$

si les bords d'attaque de la plaque P_1 sont subsoniques et respectivement

$$\Lambda_{nj}^* = \frac{8}{1 U_{\infty}(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h_{qj}^{(n)} \sqrt{B^2 - 1}}{2(q+1)} \sum_{t=0}^q [1 + (-1)^t] 1^{q-t} \int_t^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{2q+1} \int_{2q}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} p_{2q,j}^{(n)} \int_{2q}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) \right\} \quad (A-7)$$

si ces bords d'attaque sont supersoniques.

Les coefficients Λ'_{nj} ou $\Lambda_{nj}^{*,*}$ qui interviennent dans les expressions de C'_1 et de C'_m s'obtiennent en remplaçant dans (A-6) et respectivement (A-7) 1 par h et les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$ etc.. par leurs correspondantes barrées.

Similairement les coefficients Ω_{nmkj} qui interviennent dans l'expression de la résistance d'onde de l'aile cruciforme mince ont la forme suivante

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2(1+h)(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)} \int_{2q+k}^{(0,1)} + \right.$$

$$+ B1 \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1} \gamma_{2q+k}^{(0,1)} \} \quad (A-8)$$

si la plaque P_1 a ses bords d'attaque subsoniques et respectivement

$$\begin{aligned} \Omega_{nmkj}^* = & \frac{8}{U_\infty (1+h)(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h_{qj}^{(n)}}{2(k+q+1)} \left[\sqrt{B^2 1^2 - 1} \sum_{t=0}^{k+q} [1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^{k-t}] 1^{k+q-t} \gamma_t^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + [1 + (-1)^{k+1}] \arccos \frac{1}{B1} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1} \gamma_{2q+k}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} p_{2q,j}^{(n)} \gamma_{2q+k}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) \right\} \quad (A-9) \end{aligned}$$

si P_1 a ses bords d'attaque supersoniques. Les coefficients Ω_{nmkj} s'obtiennent en remplaçant 1 par h et les coefficients $a_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$ etc... par leurs correspondantes barrées soit dans (A-8) si la plaque P_1 a ses bords d'attaque subsoniques soit dans (A-9) si P_1 a ses bords d'attaque supersoniques.

Les constantes Δ_{nmkj} et $\bar{\Delta}_{nmkj}$ qui interviennent dans l'expression du coefficient de succion σ (27) sont de la forme

$$\Delta_{nmkj} = - \frac{2\pi \sqrt{1-B^2 1^2}}{B^2 U_\infty^2 (1+h)^2 (m+n)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{q'=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)} a_{2q',k}^{(m)} \quad (A-10)$$

et

$$\bar{\Delta}_{nmkj} = - \frac{2\pi \sqrt{1-B^2 h^2}}{B^2 U_\infty^2 (1+h)^2 (m+n)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{q'=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \bar{a}_{2q,j}^{(n)} \bar{a}_{2q',k}^{(m)} \quad (A-11)$$

Si on passe maintenant à l'aile cruciforme d'épaisseur symétrique pour écrire plus simplement les constantes Ω_{nmkj} de C_d il est plus convenable de séparer dans ces expressions la contribution de la vitesse axiale propre Ω'_{nmkj} et celle de la vitesse axiale d'influence Ω''_{nmkj} c'est-à-dire

$$\Omega_{nmkj} = \Omega'_{nmkj} + \Omega''_{nmkj} \quad (A-12)$$

Les coefficients Ω'_{nmkj} et Ω''_{nmkj} dus aux vitesses axiales propres ont une de ces formes :

$$\begin{aligned} \Omega'_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2(1+h)(m+n)} \sum_{q=0}^n \left\{ \frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{(n)}}{h+q+1} \left[\frac{\sqrt{1-B^2 l^2}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left[1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (-1)^{k-t} \right] l^{k+q-t} \mathcal{Y}_t(0,1) + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2} l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^q \left[1+(-1)^{k+q} \right] l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B l)^2}{4 B l}} + \frac{\delta_q^{(n)} c_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\mathcal{Y}_{k+q}(0,1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} + d_{qj}^{(n)} \mathcal{Y}_{k+q}(0,1) \right] \right\} \quad (A-13) \end{aligned}$$

et

$$\Omega''_{nmkj} = \frac{8}{U_{\infty}^2(m+n)(1+h)} \sum_{q=0}^n \left\{ \frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{1-B^2 h^2}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left[1 + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{k-t} \int_0^h h^{k+q-t} \gamma_{t,0,h}^{**} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2} h^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 h^2}} + \\
 & + (-1)^q \left[1+(-1)^{k+q} \int_0^h h^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)^2}{4 Bh}} \right] + \quad (A-14) \\
 & + \frac{\delta_q^{(n)} c_{qj}^{*(n)}}{k+q+1} \left[\gamma_{k+q,0,h}^{**} + h^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 h^2}} \right] + \\
 & + d_{qj}^{*(n)} \gamma_{k+q,0,h}^{**} \}
 \end{aligned}$$

si tous les quatre bords d'attaque de l'aile cruciforme à épaisseur symétrique sont subsoniques

$$\begin{aligned}
 \Omega_{nmkj}' & = \frac{8}{U_\infty^2 (m+n)(1+h)} \sum_{q=0}^n \left\{ \frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 1^2 - 1}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left[1 + \right. \right. \right. \\
 & + (-1)^{k-t} \int_0^1 1^{k+q-t} \gamma_{t,0,\frac{1}{B}}^{**} + 1^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B^2 1^2}} \left. \left. \left. \right] + \right. \right. \\
 & + \frac{\delta_q^{(n)} c_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \gamma_{k+q,0,\frac{1}{B}}^{**} + d_{qj}^{(n)} \gamma_{k+q,0,\frac{1}{B}}^{**} \left. \right\} \quad (A-15)
 \end{aligned}$$

et

$$\Omega_{nmkj}'(1) = \Omega_{nmkj}'(1) \quad (A-16)$$

si une plaque (P_2) a ses bords d'attaque subsoniques et l'autre plaque (P_1) a ses bords d'attaque supersoniques ;

$$\Omega_{nmkj}^{***} = \Omega_{nmkj}^{**} \quad (A-17)$$

$$\Omega_{nmkj}^{***(1)} = \frac{8}{U_{\infty}^2(m+n)(1+h)} \sum_{q=0}^n \left\{ \frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{*(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 h^2 - 1}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left[1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (-1)^{k-t} h^{k+q-t} \int_t^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + h^{k+q+1} \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2 h^2}} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\delta_q^n) c_{qj}^{*(n)}}{k+q+1} \int_{k+q}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) + d_{qj}^{*(n)} \int_{k+q}^{**} \left(0, \frac{1}{B}\right) \right\}$$

(A-18)

si tous les bords d'attaque de l'aile cruciforme sont supersoniques.

Les coefficients $\bar{\Omega}_{nmkj}'$ et $\bar{\Omega}_{nmkj}'^{(1)}$ s'obtiennent en remplaçant en Ω_{nmkj}' et respectivement $\Omega_{nmkj}'^{(1)}$ les coefficients $h_{qj}^{(n)}$, $h_{qj}^{*(n)}$ etc... par leurs correspondantes barrées.

Pour écrire les constantes Ω_{nmkj}'' dues aux vitesses axiales d'influence il faut définir premièrement les intégrales suivantes :

$$L_{km}(y) = \int \frac{y^k dy}{(1-B^2 y^2)^{\frac{m+1}{2}}} \quad (A-19)$$

qui ont les quatre valeurs suivantes :

$$L_{2r,2p} = A_{rp} \sin By + \sum_{v=0}^{r-p-1} B_{rp}^{(v)} y^{2v+1} + \sum_{v=0}^{p-1} C_{rp}^{(v)} \frac{y^{2r-2v-1}}{(1-B^2 y^2)^{p-v-\frac{1}{2}}} + C \quad (A-20-a)$$

$$L_{2r+1,2p} = \sum_{v=0}^{r-p} D_{rp}^{(v)} y^{2v} \sqrt{1-B^2 y^2} + \sum_{v=0}^{p-1} E_{rp}^{(v)} \frac{y^{2r-2v}}{(1-B^2 y^2)^{p-v-\frac{1}{2}}} + C \quad (A-20-b)$$

$$L_{2r,2p+1} = \sum_{v=1}^p F_{rp}^{(v)} \frac{y^{2r+1}}{(1-B^2 y^2)^{p-v+1}} + \sum_{v=0}^{r-1} G_{rp}^{(v)} y^{2r-2v-1} + H_{rp} \ln \frac{1+By}{1-By} + C \quad (A-20-c)$$

$$L_{2r+1,2p+1} = \sum_{v=1}^p J_{rp}^{(v)} \frac{y^{2r+2}}{(1-B^2 y^2)^{r-v+1}} + \sum_{v=1}^{r-1} K_{rp}^{(v)} y^{2r-2v} + M_{rp} \ln(1-B^2 y^2) + C \quad (A-20-d)$$

dans ces intégrales on a fait les notations suivantes :

$$A_{rp} = \frac{(-1)^p p! (2r)!}{2^{2(r-p)} r! (2p)! (r-p)! B^{2r+1}}, \quad B_{rp}^{(v)} = - \frac{2^{2v} (v!)^2}{(2v+1)!} A_{rp}$$

$$C_{rp}^{(v)} = 2 \frac{(-1)^v (2p-2v-2)! (r-v)! p! (2r)!}{(p-v-1)! (2r-2v)! r! (2p)!}$$

$$D_{rp}^{(v)} = \frac{(-1)^{p+2(r-v)} r! p! (2v)! (r-p)!}{(2p)! (p-v-1)! (r-v)! B^{2(v+1)}}$$

(A-21)

$$F_{rp}^{(v)} = \frac{(-1)^{v+1} (r-p)! (p-v)! (2r-2p+2v-2)!}{2^{2v-1} (2r-2p)! p! (r-p+v-1)!}$$

$$G_{rp}^{(v)} = \frac{(-1)^{p+1} (r-p)! (2r)!}{2^{2p} (2r-2v-1)! (r)! (2r-2p)! B^{2(v+1)}}$$

$$H_{rp} = \frac{(-1)^p (r-p)! (2r)!}{2^{2p+1} r! (2r-2p)! B^{2r+1}}$$

$$J_{rp}^{(v)} = \frac{(-1)^{v+1} (p-v)! (r-p+v-2)!}{2(p)! (r-p-1)!}$$

$$K_{rp}^{(v)} = \frac{(-1)^{p+1} r!}{2(2r-2v)(p)! (r-p)! B^{2(r+1)}}$$

$$l_{rp} = \frac{(-1)^{r+1} r!}{4(p)! B^{2(r+1)}}$$

En faisant dans L_{km} $m=0$ on retrouve l'intégrale I_k .

A l'aide de cette intégrale on forme les intégrales suivantes :

$$N_{km}(s) = \int \frac{L_{km} dy}{(y-s)\sqrt{1-B^2 y^2}} \quad (A-22)$$

et

$$N'_{km}(s) = \int \frac{L_{km} dy}{y-s} \quad (A-23)$$

Les intégrales définies de ce type sont dénotées par

$$L_{km}(0, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{y^k dy}{(1-B^2 y^2)^{\frac{m+1}{2}}} \quad (A-24-a)$$

$$N_{km}(0, \alpha; s) = \int_0^\alpha \frac{L_{km} dy}{(y-s)\sqrt{1-B^2 y^2}} \quad (A-24-b)$$

$$N'_{km}(0, \alpha; s) = \int_0^\alpha \frac{L_{km} dy}{y-s} \quad (A-24-c)$$

avec ces notations les constantes Ω''_{nmkj} et $\Omega''_{nmkj}\{1\}$ ont les formes suivantes :

$$\Omega''_{nmkj} = \frac{8 \mathcal{R}_{\theta}(-i)^{k+1}}{U_\infty^2 (m+n)(1+h)} \sum_{q=0}^{E(\frac{n-1}{2})} h_{2q,j}^{**}(n) \left[\frac{\sqrt{1-B^2 h^2}}{2} \left[\mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}(0, iL, h) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iL; -h)} + L_{k+2q, k+2q+2}^{(iL)} \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+iBL)}{2B(h+iL)}} + \right. \\
 & \left. + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-iBL)}{2B(h-iL)}} - L_{k+2q, k+2q+2}^{(0)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 h^2}} \right] + \\
 & + (1 - \delta_q^0) d_{2q, j}^{** (n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iL; 0)} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{i\pi}{2} - \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2 L^2}} \right) L_{k+2q, k+2q+2}^{(iL)} + d_{2q, j}^{** (n)} \mathcal{L}_{k+2q, k+2q+3}^{(0, iL)} + \right. \\
 & \left. + k_{2q, j}^{** (n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q+1, k+2q+3}^{(0, iL; h)} - \mathcal{N}_{k+2q+1, k+2q+3}^{(0, iL; -h)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + L_{k+2q+1, k+2q+3}^{(0)} \ln \frac{h+iL}{h-iL} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Omega_{nmikj}^{(1)} &= \frac{8 \operatorname{Re}(-i)^{k+1}}{U_{\infty}^2 (m+n) (1+h)} \sum_{q=0}^{E \frac{(n-1)}{2}} \left\{ h_{2q, j}^{(n)} \left[\frac{\sqrt{1-B^2 h^2}}{2} \left[\mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iH; 1)} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iH; -1)} + L_{k+2q, k+2q+2}^{(iH)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B1)(1-iBH)}{2B(1-iH)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B1)(1+iBH)}{2B(1+iH)}} - L_{k+2q, k+2q+2}^{(0)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 1^2}} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - \delta_q^0) c_{2q,j}^{(n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH;0)} + L_{k+2q,k+2q+2}^{(iH)} \left(\frac{i\pi}{2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{argsh} \frac{1}{\sqrt{B_1^2 - 1}} \right) \right] + d_{2q,j}^{(n)} \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH)} + \\
 & k_{2q,j}^{(n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q+1,k+2q+3}^{(0,iH;-1)} - \mathcal{N}_{k+2q+1,k+2q+3}^{(0,iH;-1)} + \right. \\
 & \left. + L_{k+2q+1,k+2q+3}^{(iH)} \ln \frac{1+iH}{1-iH} \right] \Bigg\} \quad (A-26)
 \end{aligned}$$

si l'aile cruciforme a tous ses bords d'attaque subsoniques ;

$$\Omega_{nmkj}^{**} = \Omega_{nmkj}'' \quad (A-27)$$

et

$$\begin{aligned}
 \Omega_{nmkj}^{*(1)} &= \frac{8 \mathcal{R}_e(-i)^{k+1}}{U_\infty^2 (m+n)(1+h)} \sum_{q=0}^{E \frac{(n-1)}{2}} \left\{ h_{2q,j}^{(n)} \left[\frac{\sqrt{B_1^2 - 1}}{2} \left[\mathcal{N}_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH;1)} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mathcal{N}_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH;-1)} \right] + L_{k+2q,k+2q+2}^{(iH)} \left[\arccos \sqrt{\frac{(1+B_1)(1+iB_1)}{2B(1+iH)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1)(1-iB_1)}{2B(1-iH)}} \right] - L_{k+2q,k+2q+2}^{(0)} \arccos \sqrt{\frac{1}{B_1^2 - 1}} \right] + \\
 & \left. + (1 - \delta_q^0) c_{2q,j}^{(n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH;0)} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{i\pi}{2} - \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{1}{B^2 H^2}} \right) L_{k+2q, k+2q+2}^{(iH)} \Bigg] + \\
 & + d'_{2q, j}^{(n)} \mathcal{L}_{k+2q, k+2q+3}^{(0, iH)} + k'_{2q, j}^{(n)} \left[\mathcal{N}'_{k+2q+1, k+2q+3}^{(0, iH; 1)} - \right. \\
 & \left. - \mathcal{N}'_{k+2q+1, k+2q+3}^{(0, iH; -1)} + L_{k+2q+1, k+2q+3}^{(iH)} \ln \frac{1+iH}{1-iH} \right] \Bigg\} \quad (A-28)
 \end{aligned}$$

si une plaque (P_1) a ses bords d'attaque subsoniques et l'autre (P_2) a ses bords d'attaque supersoniques ;

si tous les quatre bords d'attaque de l'aile cruciforme sont supersoniques

$$\Omega_{nmkj}^{**} = \Omega_{nmkj}^{*}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Omega_{nmkj}^{** (1)} &= \frac{8 \operatorname{Re}(-i)^{k+1}}{U_{\infty}^2 (m+n) (1+h)} \sum_{q=0}^{\frac{E(n-1)}{2}} \left\{ h'_{2q, j}^{(n)} \left[\frac{\sqrt{\frac{B^2 - 1}{2}}}{2} \left[\mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iH; 1)} + \right. \right. \right. \\
 & + \mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iH; -1)} \Bigg] + L_{k+2q, k+2q+2}^{(iH)} \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B1)(1+iBH)}{2B(1+iH)}} \right. \\
 & + \left. \left. \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1+B1)(1-iBH)}{2B(1-iH)}} \right] - L_{k+2q, k+2q+2}^{(0)} \left[\operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 1^2}} \right] + \right. \\
 & + \left. (1 - \delta_q^0) c'_{2q, j}^{(n)} \left[\mathcal{N}_{k+2q, k+2q+2}^{(0, iH; 0)} + L_{k+2q, k+2q+2}^{(iH)} \left(\frac{i\pi}{2} - \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{B^2}{H^2}}} \right) \Bigg] + d'_{2q,j}^{(n)} L_{k+2q,k+2q+2}^{(0,iH)} + \\
 & + k_{2q,j}^{(n)} \left[\mathcal{N}'_{k+2q+1,k+2q+3}^{(0,iH;1)} - \mathcal{N}'_{k+2q+1,k+2q+3}^{(0,iH;-1)} + \right. \\
 & \left. + L_{k+2q+1,k+2q+3}^{(iH)} \ln \frac{1+iH}{1-iH} \right] \Bigg\} \quad (A-30)
 \end{aligned}$$

Les constantes $\bar{\Omega}_{nmkj}''$ et $\bar{\Omega}_{nmkj}''^{(1)}$ se déduisent en remplaçant dans les constantes Ω_{nmkj}'' et respectivement $\Omega_{nmkj}''^{(1)}$ les coefficients $h_{2q,j}^{(n)}$, $h'_{2q,j}^{(n)}$, $c_{2q,j}^{(n)}$ etc... par leurs correspondantes barrées.

L'INFLUENCE D'UN FUSELAGE CONIQUE DONNE
SUR LE PROBLEME DE L'OPTIMISATION D'UNE AILE DELTA,
EN COURANT SUPERSONIQUE

Résumé

Dans le présent travail on détermine la forme de la surface d'une aile delta épaisse portante pourvue d'un fuselage conique qui a la résistance minime pour une vitesse de croisière donnée.

Dans le cadre de la théorie linéarisée qu'on utilise, on peut séparer aussi l'effet de portance de l'effet de l'épaisseur et de l'effet d'un écoulement axial symétrique connu autour du cône circulaire sans incidence. On est conduit ainsi à résoudre deux problèmes variationnels plus simples concernant l'aile delta mince pourvue d'un fuselage conique avec incidence et l'aile delta à épaisseur symétrique pourvue d'un fuselage conique, sans incidence.

Pour le premier problème d'extremum de l'aile mince munie d'un fuselage conique sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, l'incidence du fuselage, la portance et le moment de tangage. On suppose encore que la vitesse axiale de perturbation s'annule le long des bords d'attaque subsoniques de l'aile delta afin d'éviter (à la vitesse de croisière) l'apparition des nappes des tourbillons en cornet.

Pour l'aile à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique sans incidence sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du

fuselage, le volume de l'ensemble aile-fuselage. On suppose de même que l'aile doit être aussi d'épaisseur nulle le long de ses bords d'attaque et de fuite.

Ces deux problèmes d'extrema se réduisent à la résolution de certains systèmes finis d'équations algébriques linéaires.

1 - INTRODUCTION

L'aile delta munie d'un fuselage conique représente une solution approchée de l'avion supersonique moderne de grande vitesse.

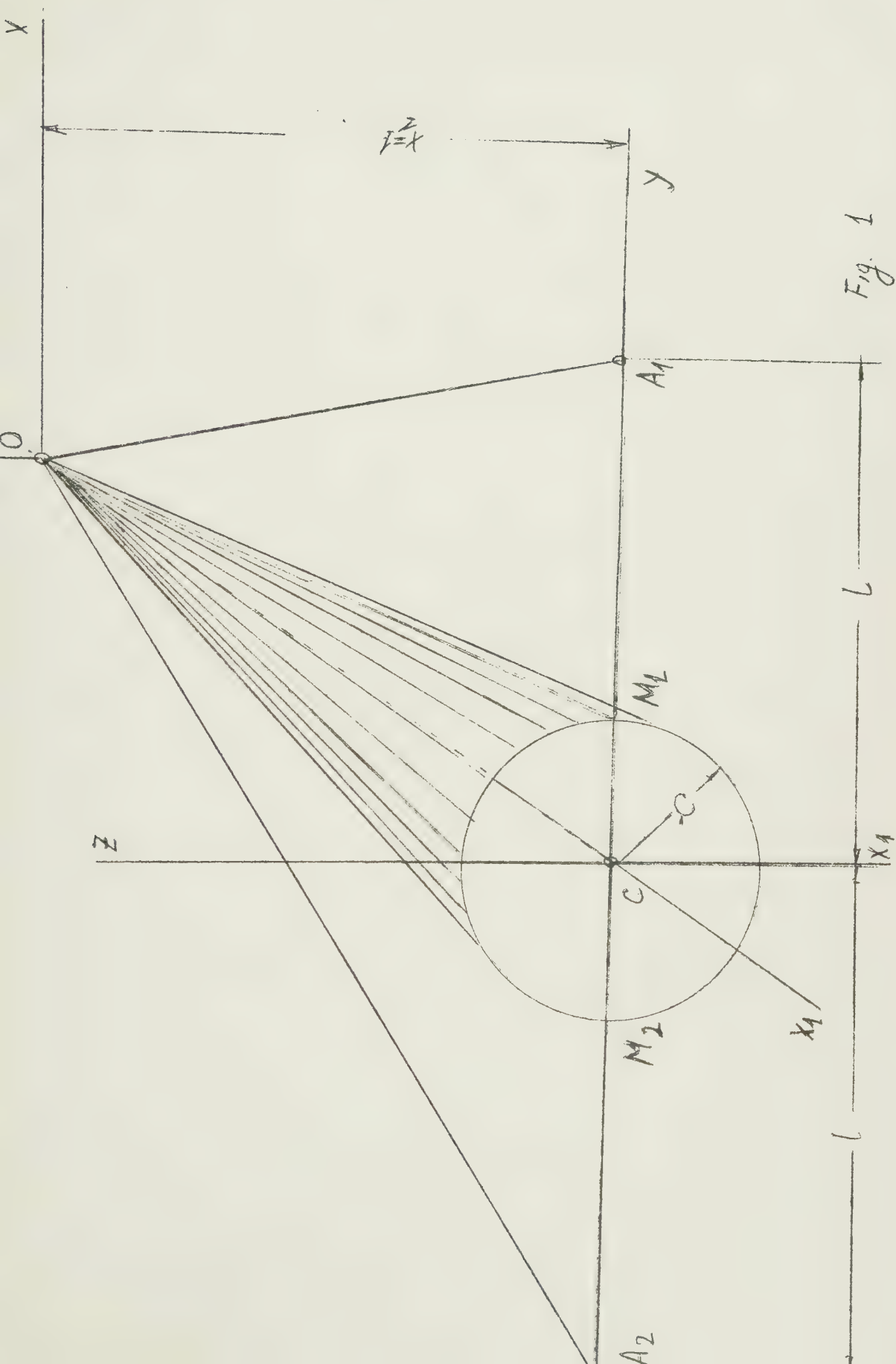
L'étude est faite dans le cadre de la théorie linéarisée, et les vitesses verticales de perturbations sur l'aile sont exprimées sous la forme d'une superposition de certains polynômes homogènes pour pouvoir ainsi utiliser la théorie des écoulements coniques d'ordre supérieur établie par P. GERMAIN.

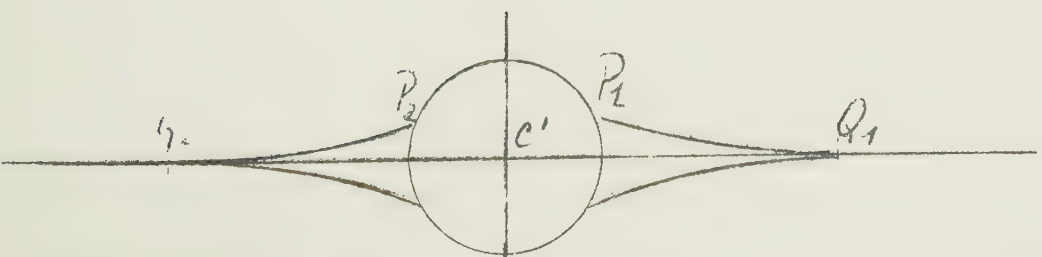
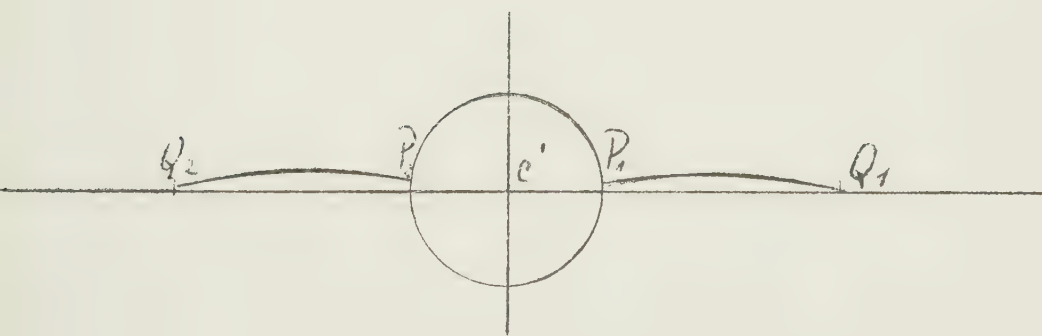
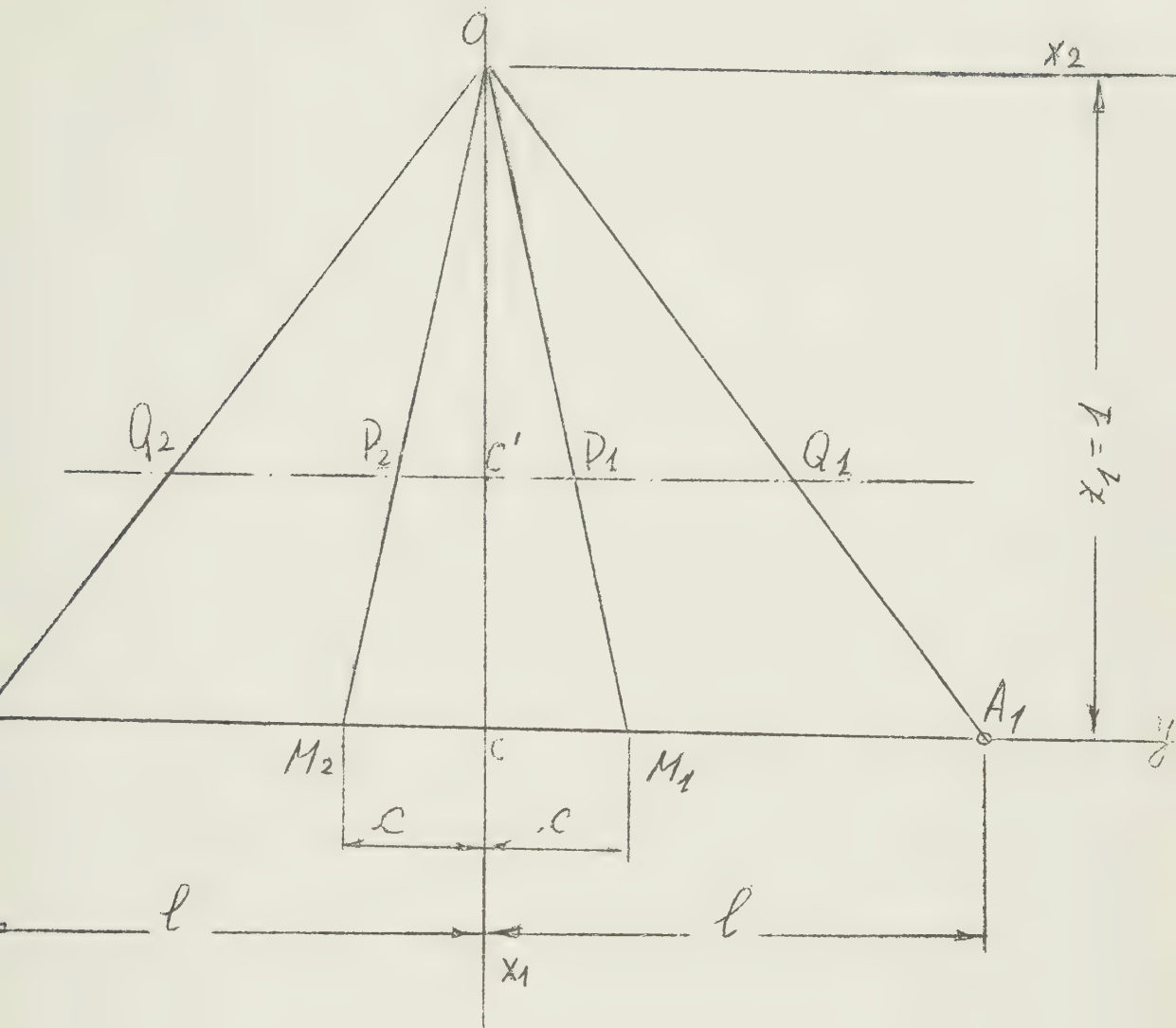
On utilise aussi la méthode variationnelle qui a donné auparavant, pour l'aile triangulaire, pour l'aile cruciforme et pour l'aile delta à géométrie variable [N - 1] des résultats les plus susceptibles aux applications pratiques.

On rapporte l'aile à un système trirectangle d'axes $Ox_1x_2x_3$ ayant l'origine O dans le sommet de l'aile et l'axe Ox_1 étant parallèle à la vitesse du courant à l'infini U_∞ (Fig. 1, 2).

Les distributions des incidences et des épaisseurs de l'aile delta sont supposées très petites de sorte qu'on peut considérer que la plaque P_1 est aplatie dans le plan Ox_1x_2 . De même l'incidence du fuselage α_0 est supposée aussi petite.

Dans ces hypothèses, dans le calcul des vitesses axiales de pertur-





bation u on peut séparer l'effet de l'épaisseur ($u^{(\epsilon)}$) de l'effet de la portance ($u^{(\sigma)}$) et de l'effet d'un écoulement axial symétrique connu autour du cône central sans incidence ($u^{(c)}$). On peut donc écrire :

$$u = u^{(\epsilon)} + \underbrace{u^{(\sigma)}}_{\text{aile}} + \underbrace{u^{(c)}}_{\text{fuselage}} \quad (1)$$

A cause du fait que le cône central est donné, le mouvement axial symétrique est connu d'avance et est traité séparément.

Il reste donc à étudier deux problèmes variationnels pour les ailes composantes pourvues d'un fuselage conique central :

- a) l'étude de la forme optimale de la surface d'une aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence,
- b) l'étude de la forme optimale de la surface d'une aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage sans incidence.

La vitesse verticale de perturbation w sur l'aile delta (mince ou à épaisseur symétrique) est supposée ainsi obtenue à la suite de la superposition de certains polynômes homogènes en x_1 et x_3 c'est-à-dire :

$$w = \sum_{m=1}^N x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} |y|^k \quad (2)$$

$$w_{m-k-1,k} = w_{m-k-1,k}^{(\sigma)} + w_{m-k-1,k}^{(\epsilon)}$$

Dans cette formule $N-1$ est le degré du polynôme de plus grand ordre considéré dans l'expression de w et $w_{m-k-1,k}$ sont des constantes arbitraires qui sont déterminées dans les problèmes d'extrema proposés.

On dénote par les indices (σ) et (ϵ) les éléments géométriques et aérodynamiques concernant les ailes delta mince et respectivement à

épaisseur symétrique, chacune d'elles étant munie d'un fuselage conique.

Dans ce qui suit on va préciser les deux problèmes d'extrema qu'on vient d'étudier.

Le premier problème d'extremum qu'on est en train d'étudier concerne la détermination de la forme de la surface d'une aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence, qui présente une résistance minimum à l'avancement pour un certain nombre de Mach de croisière M et pour laquelle sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, l'incidence du fuselage, la portance et le moment de tangage ; l'aile mince doit être aussi adaptée sur ses bords d'attaque subsoniques, c'est-à-dire la vitesse axiale de perturbation u doit s'annuler afin d'éviter au régime de croisière, la formation des nappes de tourbillons en cornet.

Le second problème d'extremum concerne la détermination de la forme de la surface d'une aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique sans incidence qui présente une résistance minimum à l'avancement pour un certain nombre de Mach de croisière et pour laquelle sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, le volume de l'aile. L'aile à épaisseur symétrique doit avoir aussi une épaisseur nulle le long de ses bords d'attaque et de fuite.

Afin de pouvoir écrire sur une forme explicite les caractéristiques aérodynamiques qui interviennent dans ces problèmes d'extrema il est premièrement nécessaire d'établir les expressions générales des vitesses axiales de perturbation u sur l'aile et sur le fuselage.

2. Calcul des vitesses axiales de perturbation u sur l'aile delta

munie d'un fuselage conique.

Pour écrire les expressions des vitesses axiales de perturbation on suit, au commencement, une voie déjà connue [C.17] et qui a permis de réduire, à l'aide de certaines approximations, l'étude de l'écoulement autour d'une aile munie d'un fuselage conique à la recherche de l'expression d'un potentiel fictif $F^{(a)}$ qui est bidimensionnelle dans un plan convenablement choisi X.

Pour définir le plan complexe $X = Y + i Z$ on part du plan physique $y o z$

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1} \quad \left(\begin{array}{l} r^2 = y^2 + z^2 \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} \end{array} \right) \quad (3)$$

et on fait ensuite les transformations successives suivantes :

a) la transformation géométrique de Busemann

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \quad \theta = \theta \quad \left(\begin{array}{l} \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2 \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\eta} \end{array} \right) \quad (4)$$

qui définit le plan complexe $\zeta = \eta + i \zeta = \rho e^{i\theta}$;

b) la transformation conforme de P. Germain

$$Bx = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \quad (\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - Bx^2}}{Bx}) \quad (5)$$

qui définit le plan complexe $x = y + i \sqrt{\gamma}$ et enfin la transformation conforme finale

$$X = x + \frac{c^2}{x} \quad (6)$$

Dans le plan de Busemann toutes les dérivées d'ordre n du potentiel ϕ c'est-à-dire $\phi_{n-q,q,r}$ satisfont l'équation du potentiel bidimensionnel et par conséquent peuvent être considérées comme la partie réelle d'une fonction analytique $F_{n-q,q,r}$ de la variable complexe. On peut donc écrire

$$F_{n-q,q,r} = \phi_{n-q,q,r} + i \phi'_{n-q,q,r} \quad (7)$$

Du fait que les transformations suivantes sont conformes, la fonction $F_{n-q,q,r}$ reste aussi analytique dans les plans x et X .

Les conditions à la limite du problème s'obtiennent en écrivant que les vitesses normales sur l'aile et le fuselage sont nulles.

L'aile étant supposée aplatie dans le plan Ox_1x_2 , la condition à la limite est écrite sur la projection de l'aile :

$$n_1 (U_\infty + u) + n_2 v + n_3 w = 0 \quad (8)$$

où n_1 , n_2 et n_3 sont les paramètres directeurs de la normale sur la surface c'est-à-dire

$$n_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1} = \tau \quad n_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2} \quad n_3 \approx 1 \quad (9)$$

Si on tient maintenant compte que, dans le cadre de la théorie des petites perturbations, u , v et w , sont petits et que l'aile étant très aplatie n_1 et n_2 sont aussi petits, on peut négliger les termes

de second ordre ($n_1 u \approx n_2 v \approx 0$) et on obtient ainsi la condition à la limite sur l'aile sous la forme suivante :

$$\frac{w}{U_\infty} = -\tau \quad (10)$$

Sur le fuselage qui a une petite incidence α_0 la condition de l'annulation de la vitesse normale conduit à la relation suivante :

$$n_1 (U_\infty + u_t) + n_2 v_t + n_3 (w_t + \alpha_0 U_\infty) = 0 \quad (11)$$

où u_t , v_t et w_t représentent les vitesses axiales totales de perturbation sur le fuselage.

Si on tient maintenant compte que les paramètres directeurs de la normale sur la surface latérale du cône sont

$$n_1 = -c \quad n_2 \approx \cos \theta \quad n_3 \approx \sin \theta \quad (12)$$

et si on considère que "c" (le rayon du cercle Γ obtenu en coupant le cône circulaire par le plan $x_1 = 1$, c'est-à-dire la trace du cône dans le plan physique y o z) est du même ordre que u_t , v_t et w_t alors en négligeant le terme de second ordre $cu_t \approx 0$ on obtient la condition suivante à la limite sur le cercle Γ du plan physique

$$v_t \cos \theta + (w_t + \alpha_0 U_\infty) \sin \theta = c U_\infty \quad (13)$$

Les conditions à la limite d'un mouvement axial symétrique autour d'un cône circulaire isolé sans incidence s'obtiennent en remplaçant dans (13) v_t et w_t avec v_a et w_a (les vitesses axiales de perturbations dans le cas du mouvement axial symétrique) et en faisant $\alpha_0 = 0$. On obtient ainsi la condition à la limite pour ce mouvement sous la forme :

$$v_a \cos \theta + w_a \sin \theta = c U_\infty \quad (14)$$

Si maintenant on retranche la relation (14) de la relation (13) et si on dénote par u , v et w les vitesses qui restent sur le fuselage après ce retranchement, on obtient ainsi la condition à la limite sur le fuselage sous la forme :

$$v \cos \theta + (w + \alpha_0 U_\infty) \sin \theta = 0 \quad (15)$$

Maintenant, pour faire intervenir la fonction $F_{n-1,1,0}$ dans les conditions à la limite (10) et (15), on met

$$\cos \theta = \frac{y}{c} = \frac{x_2}{x_1 c} \quad \sin \theta = \frac{x_3}{x_1 c} \quad (16)$$

La condition (15) peut être donc écrite sous la forme

$$x_2 v + x_3 w = x_2 \phi_{010} + x_3 \phi_{001} = 0 \quad (17)$$

si on différencie cette relation $(n-1)$ fois par rapport à x_1 , on obtient ainsi sur le cercle (Γ) du plan physique la relation suivante

$$x_2 \phi_{n-1,1,0} + x_3 \phi_{n-1,0,1} = x_1 (y \phi_{n-1,1,0} + z \phi_{n-1,0,1}) = 0 \quad (18)$$

Pour transformer la relation (18) on considère que le rayon c de la trace du fuselage conique circulaire (c'est-à-dire du cercle Γ) est beaucoup plus petite que le rayon $\frac{1}{B}$ de la trace du cône Mach de la pointe du fuselage.

Donc $B^2 c^2 \ll 1$ et, dans le cadre de cette approximation, le cercle (Γ) du plan physique se transforme dans le plan (ζ) du Busemann dans un cercle (Γ') qui a le rayon ρ :

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - B^2 c^2}}{B c} = \frac{1}{B c} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} B^2 c^2 + \epsilon (B^4 c^4) \right] \approx \frac{B c}{2}$$

Soit maintenant (Γ'') la courbe transformée du cercle (Γ') dans le plan x de P. Germain, y_c et z_c les coordonnées d'un point du (Γ'') . En tenant compte de (4) et (19) on peut donc écrire

$$B y_c = \frac{2\rho (1+\rho^2) \cos \theta}{1+2\rho^2 \cos 2\theta + \rho^4} \approx \frac{4Bc \cos \theta (4+B^2 c^2)}{16+16B^2 c^2 \cos 2\theta + B^4 c^4} \approx Bc \cos \theta = By \quad (20)$$

et

$$B z_c = \frac{2\rho (1+\rho^2) \sin \theta}{1+2\rho^2 \cos 2\theta + \rho^4} = \frac{4Bc (4+B^2 c^2) \sin \theta}{16+16B^2 c^2 \cos 2\theta + B^4 c^4} \approx Bc \sin \theta = Bz$$

Donc la courbe (Γ'') du plan x est, dans le cadre de l'approximation faite ($B^2 c^2 < 1$) un cercle identique au cercle (Γ) du plan physique et, dans la formule (18) on peut remplacer z par z_c et obtenir cette relation sur le cercle (Γ'') du plan x .

Enfin on fait aussi une approximation de la même façon dans les relations de compatibilité de P. Germain, écrites sur le cercle (Γ'') .

$$d F_{n-1, 01} = - \frac{\sqrt{1-B^2 x^2}}{i} d F_{n-1, 10} \approx + i d F_{n-1, 10} \quad (21)$$

c'est-à-dire on remplace $\sqrt{1-B^2 x^2}$ par 1. En effet dans le cadre de l'approximation faite ($B^2 c^2 < 1$), si l'on pose

$$\sqrt{1-B^2 x^2} = \rho' e^{i\varphi} \quad (22)$$

on obtient

$$\rho'^2 = 1 - 2B^2 c^2 \cos 2\theta + B^4 c^4 \sin 2\theta \approx 1 \quad (23)$$

et

$$\begin{aligned} 2 \varphi &\approx \arctan \left(\frac{B^2 c^2 \sin 2\theta}{1 - B^2 c^2 \cos 2\theta} \right) \approx \arctan (B^2 c^2 \sin 2\theta) \approx \\ &= \arctan \varepsilon^2 \approx \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (24)$$

et donc

$$\sin \varphi \approx 0 \quad \cos \varphi \approx 1 \quad (25)$$

Si on tient maintenant compte des formules (20) et (21) la relation (18) peut être écrite sur le cercle (r'') du plan x sous la forme suivante

$$\Re (x F_{n-1,1,0})_{(r'')} = 0 \quad (26)$$

Maintenant si on fait la transformation (6) le cercle (r'') du plan x se réduit dans le plan $X = Y + iZ$ à la coupure $\overline{M_1 M_2}$ $[-2c, 2c]$ de l'axe OY et la condition (26) s'écrit sur cette coupure sous la forme :

$$\sum_m \left[\frac{d F_{n-1,1,0}}{d x} \right]_{M_1 M_2} = 0 \quad (27)$$

D'autre part si on tient maintenant compte seulement d'un des polynômes, w_{n-1} , de la superposition (6), à cause du fait qu'il est homogène d'ordre $(n-1)$ on peut écrire avec Euler

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^q}{(n-1)!} y^q \phi_{n-q-1,q,1} \quad (28)$$

En comparant cette relation avec l'expression de w_{n-1} obtenu de (6) on peut voir que, sur l'aile

$$\phi_{n-q-1,q,1} = \Re F_{n-q-1,q,1} = \frac{(n-1)!}{C_{n-1}^q} w_{n-q-1,q} = \text{const.} \quad (29)$$

c'est-à-dire

$$\left[\mathcal{R}_e \int_{M_i A_i} F_{n-q-1, q, 1} \right] = \text{const.} \quad (30)$$

où on a noté par $M_i A_i$ les coupures $M_2 A_2 [-L, 2c]$ et $M_1 A_1 [2c, L]$ qui représentent les traces de l'aile sur l'axe OY du plan X et

$$L = \frac{l^2 + c^2}{1} \quad (31)$$

si on tient maintenant compte des relations de compatibilité de P. Germain, de la relation (30) on déduit que, sur l'aile, on a :

$$\left| \int_{M_i A_i} F_{n-1, 1, 0} \right| = \text{const.} \quad (i=1, 2) \quad (32)$$

Soit maintenant I le point à l'infini du plan complexe X. Sur l'axe OY de ce plan, à l'extérieur de la coupure $[-L, L]$ on peut écrire :

a) pour l'aile delta à épaisseur symétrique avec les bords d'attaque supersoniques, et pour les ailes delta minces pourvues d'un fuselage conique

$$\mathcal{R}_e \left| \int_{A_i I} F_{n-1, 1, 0} \right| = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2) \quad (33)$$

b) pour les ailes à épaisseur symétrique avec les bords d'attaque subsoniques, munies d'un fuselage conique on a :

$$\int_{A_i D_i} F_{n-1, 1, 0} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (34)$$

et

$$\mathcal{R}_e \left| \int_{D_i I} F_{n-1, 1, 0} \right| = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (35)$$

Les points D_1 et D_2 de l'axe OY ont respectivement les abscisses $\pm \frac{1}{\beta}$ où

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1 + B_c^2}{B} \quad (36)$$

Si on dénote par $F^{(a)}$ un potentiel fictif défini par la formule suivante :

$$F^{(a)} = \frac{d}{dX} \left(\frac{F_{n-1,0,0}}{x_1} \right) \quad (37)$$

alors on peut réduire le problème de la détermination du potentiel $F_{n-1,1,0}$ à la recherche du potentiel fictif $F^{(a)}$ qui satisfait les conditions suivantes à la limite sur l'axe OY du plan complexe $X = Y + iZ$:

$$\oint_m [F^{(a)}]_{M_1 M_2} = 0 \quad (38)$$

$$\oint_m [F^{(a)}]_{M_i A_i} = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4C^2}} \right] = F(Y) \quad (39)$$

et à l'extérieur du segment $A_1 A_2$ de l'axe OY on a :

a) pour les ailes delta à épaisseur symétrique ayant ses bords d'attaque supersoniques ou pour les ailes delta minces pourvues d'un fuselage conique, on a sur l'axe OY du plan $X = Y + iZ$ et à l'extérieur du segment $A_1 A_2$ $[-L, L]$:

$$\Re [F^{(a)}]_{A_i I} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (40)$$

tandis que pour les ailes delta à épaisseur symétrique ayant ses bords d'attaque subsoniques on a sur la même région de l'axe OY :

$$\int_m [F^{(a)}]_{D_i A_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (41)$$

et respectivement

$$\Re [F^{(a)}]_{D_i I} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (42)$$

Ces conditions aux limites qui doivent être satisfaites sur l'axe OY par la fonction $F^{(a)}$ sont réunies dans les (figures 3 et 4).

Le potentiel fictif $F^{(a)}$ peut être obtenu par la méthode de l'analogie hydrodynamique [C - 5] par l'addition des contributions des bords d'attaque OA_1 et OA_2 de l'aile, des contributions des lignes OM_1 et OM_2 (qui jouent le rôle des arêtes sur une aile delta) et des contributions dues à une distribution continue d'arêtes qui est comprise dans les zones $A_1 OM_1$ et $A_2 OM_2$. De même on admet que la vitesse axiale de perturbation contient les singularités minima qui assurent le saut nécessaire de ces vitesses dans la proximité des bords d'attaque et des arêtes. Par conséquent la fonction $F^{(a)}$ contient ces singularités ainsi que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ c'est-à-dire des multiples.

Avec ces observations on peut obtenir dans le plan X, les expressions suivantes pour $F^{(a)}$

$$\begin{aligned} F^{(a)} = & \frac{\sum_{p=0}^{2n-1} \alpha_p X^p}{(L^2 - X^2)^{n-1} \sqrt{L^2 - X^2}} + \beta \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+2c)(L-X)}{2L(2c-X)}} + \\ & + \gamma \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+2c)(L+X)}{2L(2c+X)}} + \frac{\sum_{p=0}^{2n-3} \tau_p X^p \sqrt{L^2 - X^2}}{(4c^2 - X^2)^{n-1}} \\ & + i \frac{a X}{\sqrt{L^2 - X^2}} \end{aligned} \quad (43)$$

pour l'aile delta mince aux bords d'attaque subsoniques munie d'un fuselage conique et respectivement :

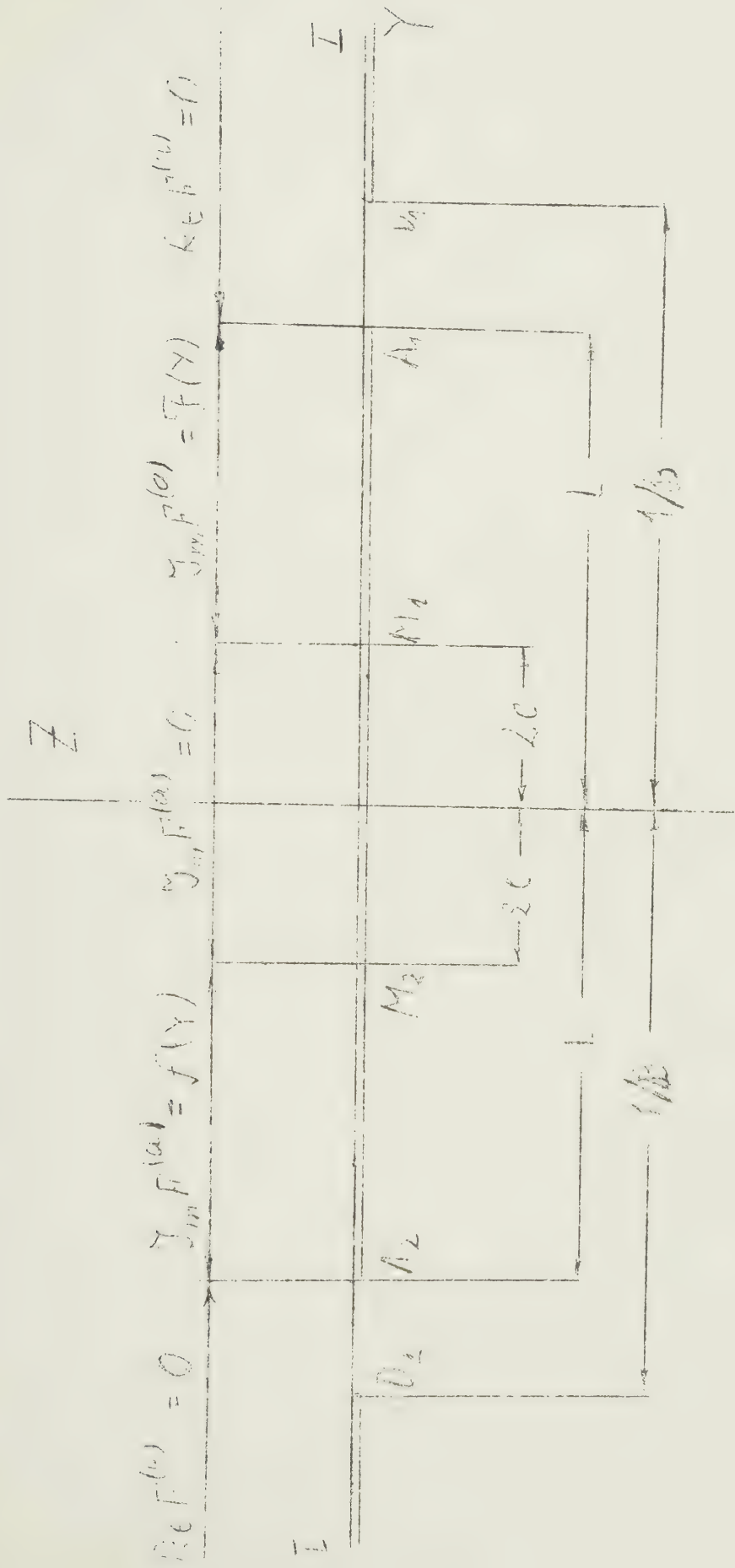
$$\begin{aligned}
 F^{(a)} = & \alpha \arccos \sqrt{\frac{(1+\beta L)(1-\beta X)}{2\beta(L-X)}} + \beta \arccos \sqrt{\frac{(1+\beta L)(1+\beta X)}{2\beta(L+X)}} + \\
 & + \frac{\sum_{p=0}^{2n-3} \gamma_p X^p \sqrt{1-\beta^2 X^2}}{(L^2-X^2)^{n-1}} + \delta \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+2\beta c)(1-\beta X)}{2\beta(2c-X)}} + \\
 & + \nu \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+2\beta c)(1+\beta X)}{2\beta(2c+X)}} + \frac{\sum_{p=0}^{2n-3} \tau_p X^p \sqrt{1-\beta^2 X^2}}{(4c^2-X^2)^{n-1}} + \\
 & + i \frac{aX}{\sqrt{X^2-4c^2}} + \frac{bX}{\sqrt{X^2-4c^2}} \arccos \sqrt{\frac{(L^2-4c^2)(1-\beta^2 X^2)}{1-4\beta^2 c^2(L^2-X^2)}} \quad (44)
 \end{aligned}$$

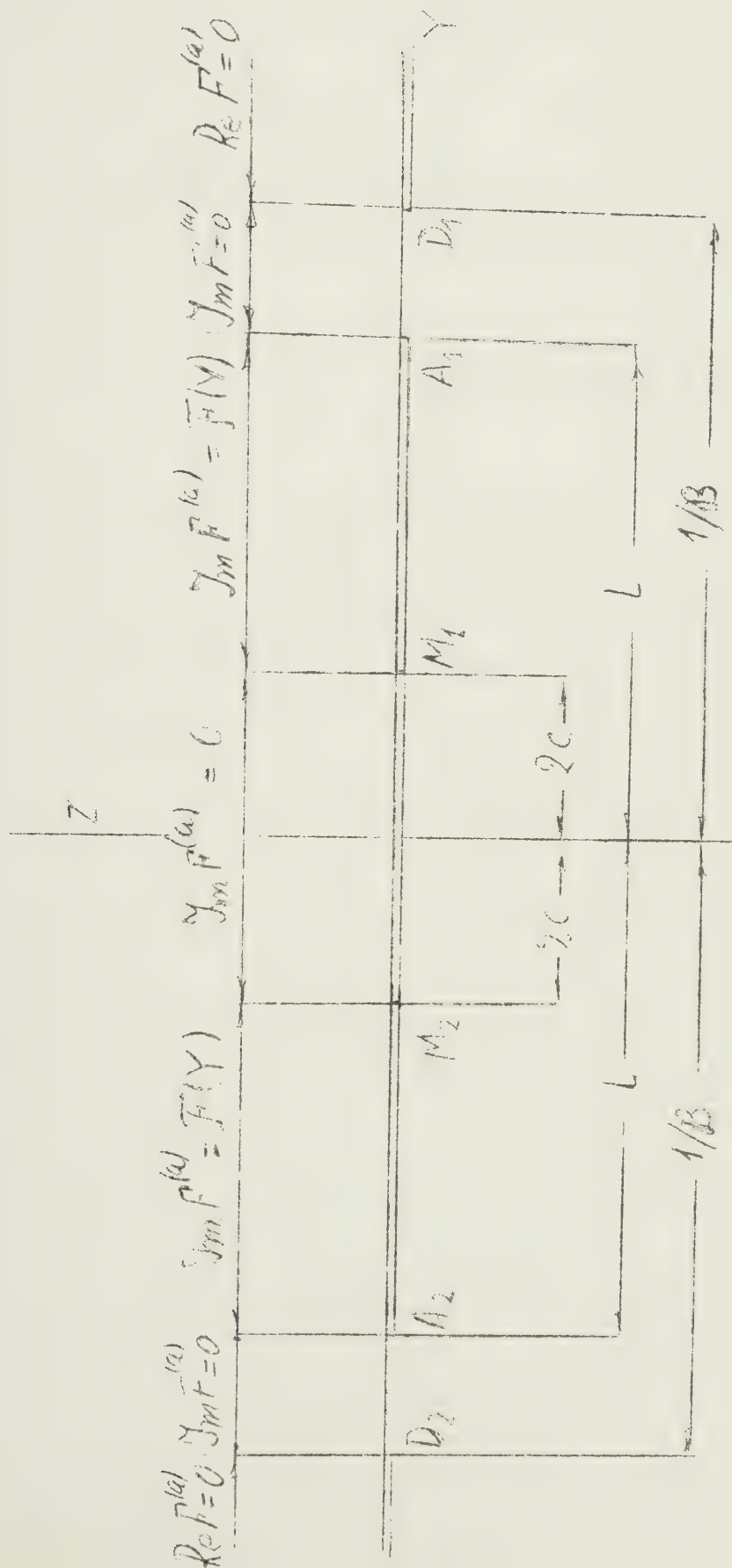
pour les ailes delta (mince ou à épaisseur symétrique) aux bords d'attaque supersoniques munies d'un fuselage conique.

Dans le cas de l'aile delta à épaisseur symétrique aux bords d'attaque subsoniques, on obtient $F^{(a)}$ si on part de la formule (44) dans laquelle on remplace dans les deux premiers termes (qui représentent la contribution des bords d'attaque de l'aile dans l'expression de $F^{(a)}$) "arccos" par "argch".

Soit maintenant la fonction de vitesse axiale définie par la relation

$$R_e U = \frac{u}{x_1^{n-1}} \quad (45)$$





On peut obtenir l'expression de U en fonction de $F^{(a)}$ en partant de la relation d'homogénéité d'Euler et en tenant compte des relations de compatibilité de P. Germain. On peut écrire ainsi d'une manière successive :

$$U = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q,q,0} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q (-1)^{q-1} x^q \int \frac{dF_{n-1,1,0}}{x^{q-1}} \quad (46)$$

si on tient maintenant compte aussi de la relation (37) on peut obtenir après certaines transformations simples, l'expression de U en fonction de $F^{(a)}$ sous la forme suivante .

$$\begin{aligned} U &= \int F^{(a)} dX + \sum_{q=2}^{n-1} \beta_q x^q \int \frac{F^{(a)} dX}{x^q} = \\ &= \int F^{(a)} dX + \sum_{q=2}^{n-1} \beta_q x^q \left[\int Q_q(X) F^{(a)} dX + \right. \\ &\quad \left. + \int P_{q-1}(X) F^{(a)} \sqrt{X^2 - 4c^2} dX \right] \quad (47) \end{aligned}$$

où on a dénoté par $Q_q(X)$ et $P_{q-1}(X)$ des polynômes d'ordre q et respectivement $q-1$.

Si on tient maintenant compte des expressions (43) et respectivement (44) de $F^{(a)}$, du principe de singularité minima, ainsi que du fait que la fonction de vitesse axiale doit être symétrique par rapport à X , on obtient après certains calculs les expressions ~~suivantes~~ pour les vitesses axiales de perturbation u .

ainsi pour $n=2$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \int F^{(a)} dx = \frac{A_{20} + A_{22}x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}} + \\
 &+ (C_{20} + C_{21}x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+2c)(L-x)}{2L(2c-x)}} + \\
 &+ (C_{20} - C_{21}x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L+2c)(L+x)}{2L(2c+x)}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \pi C_{21} \sqrt{x^2 - 4c^2}
 \end{aligned} \quad (50)$$

les bords de l'aile mince munie d'un fuselage sont subsoniques et respectivement

$$\begin{aligned}
 u &= (K_{20} + K_{21}x) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \beta L)(1 - \beta x)}{2\beta(L-x)}} + \\
 &+ (K_{20} - K_{21}x) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \beta L)(1 + \beta x)}{2\beta(L+x)}} + \\
 &+ K_{21} \sqrt{x^2 - 4c^2} \arccos \sqrt{\frac{(1 - \beta^2 x^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - x^2)(1 - 4\beta^2 c^2)}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \pi K_{21} \sqrt{1 - \beta^2 x^2} + \frac{1}{2} \pi K_{21} \sqrt{x^2 - 4c^2}
 \end{aligned} \quad (51)$$

les bords d'attaque de l'aile (mince ou à épaisseur symétrique) munie d'un fuselage, sont supersoniques.

Observation

1) Si les bords d'attaque de l'aile à épaisseur symétrique munie d'un fuselage, sont subsoniques l'expression correspondante de U s'obtient aussi à l'aide de la formule (51) dans laquelle on doit remplacer dans les deux premiers termes (qui représentent la contribution des bords d'attaque de l'aile dans l'expression de U) "arccos" par "argch".

2) Si dans les formules (50) et (51) on fait $c=0$ alors $L = 1$
 $X = x$ $B = \delta$ et on obtient les expressions de la fonction de vitesse axiale U sur les ailes delta isolées munies d'une arête centrale.

3) Si dans la formule (50) on fait $L = 2c$ et si on tient compte aussi du principe des singularités minima on obtient l'expression de la fonction de vitesse axiale U sur le cône circulaire en dérive.

Les coefficients des vitesses axiales de perturbation u sont liés aux coefficients $w_{n-j-1,j}$ de la vitesse verticale de perturbation w par des relations linéaires et homogènes déduites des relations de compatibilité de P. Germain. On peut donc écrire des relations de la forme :

$$C_{nq} = \sum_{q=0}^{n-1} c_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} \quad (53)$$

Les coefficients $c_{qj}^{(n)}$ dépendent du nombre Mach M de croisière et des projections dans le plan de l'aile et du fuselage et par conséquent ils sont des constantes dans les problèmes d'extrema étudiés.

4. Expressions des vitesses de perturbation dues au mouvement axial symétrique autour d'un fuselage conique isolé sans incidence

Le mouvement axial symétrique autour d'un fuselage conique circulaire sous incidence est classique. D'après [C 17 - M.3 - N - 16] on peut donc écrire l'expression de la vitesse axiale de perturbation sur le cône circulaire sous la forme

$$U^{(c)} = C_1 \operatorname{argch} \frac{1}{B c} \quad (50)$$

où

$$C_1 = \frac{c^2 U_\infty^2}{\sqrt{1 - B^2 c^2} + c^2 \operatorname{argch} \frac{1}{B c}} \quad (51)$$

et, comme on a supposé la pente du cône $\operatorname{tg} \delta = C$ petite le coefficient de pression a l'expression suivante

$$C_p \approx - \frac{2 u^{(c)}}{U_\infty} = 2 \frac{C_1}{U_\infty} \operatorname{argch} \frac{1}{B c} \quad (52)$$

L'influence du mouvement axial symétrique autour du fuselage isolé s'exerce seulement sur la résistance à l'avancement du système aile-fuselage

4. Détermination de la forme optimale de l'aile delta mince, munie d'un fuselage conique donné avec incidence.

On se propose donc de résoudre le premier problème d'extremum c'est-à-dire de déterminer la forme de la surface d'une aile delta mince munie d'un fuselage conique avec incidence de telle sorte qu'elle présente une résistance minimum à l'avancement et pour laquelle sont données : les projections dans le plan de l'aile et de fuselage, la portance et le moment de tangage. On suppose encore que l'aile mince est adaptée sur ses bords d'attaque subsoniques.

La condition que la portance de l'aile soit donnée ($C_l = C_{l_0}$) s'écrit :

$$C_l = \frac{4}{1 U_\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \int_0^1 u_{n-1} dy =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = C_{l_0} \quad (53)$$

La condition que le moment de tangage de l'aile soit donné ($C_m = C_{m_0}$) devient

$$C_m = \frac{4}{1 U_\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \int_0^1 u_{n-1} dy =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = C_{m_0} \quad (54)$$

On a considéré l'aile adoptée, condition qui est remplie si on annule la vitesse axiale de perturbation le long de ses bords d'attaque subsoniques au régime de croisière. Si on suppose cette condition 1 long du bord d'attaque subsonique OA_1 ($y = L, u = 0$) on obtient la relation :

$$F_n \equiv \sum_{q=0}^{n-1} A_{n,2q} L^{2q} = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_{nj} w_{n-j-1,j} = 0 \quad (55)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

Observations. 1) La condition d'adaptation sur le bord d'attaque subsonique OA_2 ($y = -L, u = 0$) est automatiquement satisfaite si elle est remplie sur le bord OA_1 à cause de la symétrie de l'aile par rapport au plan OX_1X_3 .

2) Si les bords d'attaque sont supersoniques la condition d'adaptation sur les bords d'attaque est automatiquement satisfaite .

La résistance d'onde du système aile fuselage (mouvement axial symétrique autour du fuselage isolé inclus) est de la forme

$$C_D \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{nmkj} w_{n-j-1,j} w_{m-k-1,k} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{mk} w_{m-k-1,k} + C_D^{(c)} \quad (56)$$

On peut maintenant déterminer les valeurs des coefficients

$w_{n-j-1,j}$ de w de telle sorte que

$$C_D = \text{minimum} \quad (57)$$

avec les conditions de liaison suivantes

$$C_1 = \text{const.} \quad C_M = \text{const.} \quad F_n = \text{const.} \quad (58)$$

$$(n=1, 2, \dots, N)$$

Ce problème d'extremum avec liaison se réduit à la résolution du problème d'extremum sans liaisons de l'expression de Hamilton

$$H = C_0 + \lambda^{(1)} C_1 + \lambda^{(2)} C_M + \sum_{n=1}^N \lambda_n F_n \quad (59)$$

où $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ et λ_n sont les multiplicateurs de Lagrange.

Si on annule la première variation de H , on sépare les variations, et on annule les coefficients de chaque variation $\delta_{w\theta\sigma}$ on obtient des équations de la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \left[(\Omega_{n, \theta+\sigma+1, \sigma, j} + \Omega_{\theta+\sigma+1, n, j, \sigma}) w_{n-j-1, j} \right] + \\ & + \left[\lambda^{(1)} + \frac{\theta + \sigma + 2}{\theta + \sigma + 3} \lambda^{(2)} \right] \Omega_{\theta+\sigma+1, \sigma} + \\ & + \Omega_{\theta+\sigma+1, \sigma} + \lambda_{\theta+\sigma+1} \Psi_{\theta+\sigma+1, \sigma} = 0 \\ & \theta, \sigma = 0, 1, \dots, N-1 \\ & 1 \leq \theta + \sigma + 1 \leq N \end{aligned} \quad (60)$$

Les équations (60) forment avec les conditions de liaison (58) un système algébrique linéaire qui détermine les valeurs optimales des coefficients $w_{n-j-1, j}$ ainsi que les valeurs de multiplicateurs de Lagrange.

5. Détermination de la forme optimale de l'aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique donné sans incidence.

On passe maintenant à la détermination de la forme de la surface de l'aile delta à épaisseur symétrique munie d'un fuselage conique donné sans incidence, qui doit présenter une résistance minimum à l'avancement au régime de croisière.

Pour l'ensemble aile-fuselage conique sont donnés : les projections dans le plan de l'aile et du fuselage, le volume de l'ensemble aile-fuselage. On suppose aussi que l'aile doit être d'épaisseur nulle le long de ses bords d'attaque et de fuite.

La surface $Z(x_1, x_2)$ de l'aile s'obtient si l'on fait l'intégration par rapport à x_1 de la formule (2)

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) &= \frac{1}{U_\infty} \int w dx_1 + f(x_2) = \\ &= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \frac{|y|^k}{m-k} + f(x_2) \end{aligned} \quad (61)$$

Si on détermine maintenant la fonction arbitraire $f(x_2)$ de telle manière que l'épaisseur de l'aile soit nulle sur le bord de fuite ($x_1 = 1$; $Z = 0$) on obtient pour $Z(x_1, x_2)$ l'expression suivante

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,k}}{m-k} x_2^k (x_1^{m-k-1}) \quad (62)$$

L'aile delta doit être d'épaisseur nulle sur le bord d'attaque OA_1 ($y=1$, $Z = 0$).

On obtient ainsi les conditions suivantes de liaison :

$$E_t \equiv \sum_{m=t+1}^N \sum_{k=0}^{m-1} d_{mk}^{(t)} w_{m-k-1,k} = 0 \quad (63)$$

$$t = 0, 1, \dots, (N-1)$$

où

$$d_{mk}^{(t)} = \frac{1}{m-k} \left(\delta_m^t - \delta_k^t \right) \quad (64)$$

La condition que le volume de l'aile soit donné ($v = v_0$),

conduit à la relation :

$$V \equiv \int_0^1 Z x_1 dx_1 dy = \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{mk} w_{m-k-1,k} = V_0 \quad (65)$$

où

$$\tau_{mk} = - \frac{2(1^{k+1} - c^{k+1})}{U_\infty (k+1)(k+2)(m+2)} \quad (66)$$

L'expression du coefficient de résistance d'onde de l'ensemble

aile fuselage (mouvement axial symétrique autour du fuselage seul inclus)

devient :

$$C_D \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{nmkj} w_{n-j-1,j} w_{m-k-1,k} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{mj} w_{m-k-1,k} + C_D^{(c)} \quad (67)$$

On cherche donc les valeurs des coefficients de w de telle

sorte que

$$C_D = \text{minimum} \quad (68)$$

avec les conditions de liaison

$$V = V_0 \quad E_t = 0 \quad (69)$$

$$t = 0, 1, \dots (N-1)$$

L'expression de Hamilton correspondante est

$$H = C_D + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=1}^N \lambda_t E_t \quad (70)$$

Et si on annule les coefficients de chaque variation $\delta w_{\theta\sigma}$ dans l'expression de δH , on obtient les équations :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=0}^{n-1} (\Omega_{n, \theta+\sigma+1, \sigma, j} + \Omega_{\theta+\sigma+1, n, j, \sigma}) w_{n-j-1, j} + \Omega_{\theta+\sigma+1, \sigma} + \lambda^{(0)} \tau_{\theta+\sigma+1, \sigma} + \sum_{t=0}^{\theta+\sigma} \lambda_t d_{\theta+\sigma+1, \sigma}^{(t)} = 0 \quad (71)$$

Ces équations avec les conditions (70) forment un système linéaire d'équations algébriques qui détermine d'une manière univoque les valeurs optimales des coefficients de w ainsi que les valeurs des multiplicateurs de Lagrange $\lambda^{(0)}$ et λ_t .

BIBLIOGRAPHIE

A

1. ADAMS M.C., Leading-Edge Separation From Delta Wings at Supersonic Speeds, J.A.S., June 1953.

B

1. BESHKINE L., Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses supersoniques. Les Cahiers d'Aérodynamique, 6 (1947).
2. BORISOV V.M., SHMYGLEVSKI Iu. D., The Formulation of Variational Problems of Gas Dynamic, PMM, 27, 1 (1963).
3. BROWN C.E., MICHAEL W.H., Effect of Leading-edge Separation on the Lift of a Delta Wing, JAS, October 1954.
4. BUSEMANN A., Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit, Atti del Convegno della Fondazione Alessandro Volta, 1935, 1936, p.328-360, et Luftfahrtforschung, 12, 210-220 (1935).
5. BUSEMANN A., Infinitesimale kegelige Überschallströmung, Schr. Deutscher Akad. Luftfahrt, 7 b, 105-22 (1943) ; et NACA Tech. Memo. no. 1100 (1947).

C

1. CABANNES H. Mécanique Dunod 1966. Paris.
2. CARAFOLI E., Aerodinamica, Bucuresti, Edit tehnica, 1951 ; idem, Tragflügeltheorie, Berlin, Verlag Technik, 1954 ; idem, Aerodynamika kryla samoleta, Moscova, Izd-vo Akad.Nauk SSSR, 1956.
3. CARAFOLI E., High-Speed Aerodynamics, Bucuresti, Edit. tehnica, 1956 ; idem, Aerodinamica vitezelor mari, Edit. Acad. R.P.R., 1957 ; idem, Aerodinamika bolshih skorostey, Moscova, Izd-vo Akad. Nauk SSSR, 1960.
4. CARAFOLI E., Asupra caracterului hidrodinamic al solutiilor din miscarile conice aplicate la teoria aripilor poligonale, Comunicarile Acad. R.P.R., II, 9-10 (1952). (Sur le caractère hydrodynamique des solutions des mouvements coniques utilisées dans la théorie des ailes polygones).

5. CARAFOLI E., Extinderea analogiei hidrodinamice din miscarile conice la aripile groase si cu incidenta variabila, Comunicarile Acad. R.P.R., III, 3 - 4 (1953). (L'extension de l'analogie hydrodynamique des mouvements coniques à l'aile épaisse à pente variable).
6. CARAFOLI E., HOROVITZ B., Homogeneous Flows of Higher Order Round a Cruciform Wing, with Application to Harmonic Oscillations, The XI-th International Congress of Applied Mechanics, Brussels, Sept. 1955.
7. CARAFOLIE., IONESCU M., Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires ou à épaisseur symétrique, Revue de Méc. Appl., II, 1 (1957).
8. CARAFOLI E., MATEESCU DAN, High Order Conical Flow Around a Delta Wing Fitted with Conical Body, Proceedings of the Seminar on Aeronautical Sciences (Nov. 27 - Dec. 2, 1961, Bangalore, India), p.249-269.
9. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, Etude des ailes triangulaires minces à symétrie forcée, Revue de Méc. Appl., III, 4 (1958) ; et St. cerc. mec. apl., IX, 4 (1958).
10. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, Trapetsievidnye krylia s minimalnym lobovym soprotivleniem v sverkhzvukovom potoke, Mekhanika (Moscou), 1 (1961).
11. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, Minimum Drag Thin Triangular Wing in Supersonic Flow, Revue de Méc. Appl., V, 5 (1960) ; et St. cerc. mec. apl., XI, 4 (1960).
12. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, On the Minimum Drag Problem of the Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow., Rev. de Méc. App., VII, 2 (1962) ; et St. cerc. mec. apl., XIII, 1 (1962).
13. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, L'utilisation de la méthode des résidus dans le problème de résistance minimum de l'aile trapézoïdale en courant supersonique. Arbiwum Mechaniki Stosowanej (Pologne) 3, 16 (1964).
14. CARAFOLIE., NASTASE ADRIANA The Optimum Shape of the Cruciform Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow, Rev. Roum. Sci. Techn. - Mécanique Appliquée XI 2, (1967) ; et SCMA, XXIII, 6, (1966).

15. CARAFOLI E., NASTASE ADRIANA, Minimum Drag Thin Delta Wing with Finite Velocity at the Leading Edges in Supersonic Flow, Revue de Méc. Appl., 12, 5 (1967) ; et St. cerc. mec. apl., 26, 5 (1967).
16. CARAFOLI E., STAIU ST., Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque. Journ. de Méc. (Paris), 6.2 (1967) ; et St. cerc. mec. apl., 22, 4 (1966).
17. CARAFOLI E., MATEESCU D., NASTASE ADRIANA, Wing Theory in Supersonic Flow. Londres, Pergamon Press 1969.
18. COHEN D., voir [J - 4] , en coll. avec Jones R.T.

D

1. Das. A. Über die Berechnung der optimalen aerodynamischen Form von schlanken Flugkörpern bei Überschallgeschwindigkeit. Jahrbuch 1968 der D.G.L.R., p.108-125.
2. DROUGGE G., Wing Sections with Minimum Drag at Supersonic Speeds, The Aeronautical Research Institute of Sweden, Report N°. 26 (1949).
3. VAN DYKE M.D., First Order and Second Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution, Rand Corp. Rept. P-125 (1949).
4. DONOVAN A.F., LAWRENCE H.R., Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds vol VII, Londres.

E

1. EDWARDS, R.H., Leading-Edge Separation from Delta Wings, J.A.S., Febr. 1954.

F

1. FENAIN M., Traînée d'ailes delta symétriques à incidence nulle en régime supersonique, la Rech. Aér., 16 (1950).
2. FENAIN M., VALLEE DENISE, Application de la théorie des écoulements homogènes à la recherche de l'adaptation de certaines ailes en régime supersonique, ONERA Mémo-Technique 14 (1959), première et seconde partie.

3. FENAIN M., VALLEE D., Formulaire et Tables pour le calcul des ailes en flèches effilées en régimes supersonique et sonique. ONERA, Mémo Technique, N°18 (1959).
4. FENAIN M., La théorie des écoulements à potentiel homogène et ses applications au calcul des ailes en régime supersonique, in Progress in Aeronautical Sciences, vol. I, Londra, Pergamon Press, 1961.
5. FENAIN M., VALLEE - GUIRAUD D., Calcul numérique des ailes en régime supersonique stationnaire ou instationnaire 1-re partie écoulement stationnaire, Rech. Aér. 115 (1966).
6. FERRARI C., Sulla determinazione di alcuni tipi di campi di corrente ipersonora, Rend. reale accad. nazl. Lincei, Rome, VII (6), Ser. VIII (1949) ; et NACA Tech. Mem. 1381, Nov. 1954.
7. FERRI A., Investigations and Experiments in the Guidonia Supersonic Wind Tunnel. NACA Technical Memorandum 901 (1939) ; et Experimental Results with Airfoils Tested in the High Speed Tunnel at Guidonia, NACA Technical Memorandum 946 (1940).
8. FERRI A., Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows, New York, Macmillan Co. 1949.
9. FLAX A., Relations Between the Characteristics of a Wing and its Reverse in Supersonic Flow, J. Aero Sci., 16, 496-504 (1949).

G

1. GERMAIN P., The General Theory of Conical Motions and its Application to Supersonic Aerodynamics, ONERA Publication, 34, (1949).
2. GERMAIN P., La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique, Rech. Aero., 7, 3-16 (1949).
3. GERMAIN P., VALLEE D., Effet de dièdre sur une aile delta en régime supersonique, La Recherche Aéronautique, 52, 13-20 (1956).
4. GERMAIN P., Aile symétrique à portance nulle et de volume donné réalisant le minimum de traînée en écoulement supersonique, Comptes Rendus, 244 (1957).

5. GERMAIN P., Sur le minimum de trainée d'une aile de forme en plan donné, Comptes Rendus, Acad. Sci., Févr. 1957.
6. GLODSTEIN S., WARD G.N., The Linearized Theory of Conical Fields in Supersonic Flow, with Applications to Plane Aerofoils, Aeron. Quart., 2, 39-84 (1950).
7. GRAHAM W.E., A Drag Reduction Method for Wings of Fixed Planform, JAS, 19, 12 (1952).
8. GRAHAM E.W., Approximation of Optimum Lift Distribution from Their Spanwise Moments, Douglas Aircraft Rep. No. 8 M-23021 (1957).
9. GRAHAM E.W., A Geometric Problem Related to the Optimum Distribution of Lift on Planar Wing in Supersonic Flow, J. Aero Space Sciences. Dec. 1958.
10. GRAHAM M.E., LAGERSTROM P.A., Reduction of Minimum Drag Problem in Supersonic Flow to Two Dimensional Potential Problems by Means of the Combined Flow Field, Douglas Air. Co. - Rep. SM-23 901, March 1960.
11. GROBNER W., HOFREITER N., Integraltafel, Teil I-II, Wien Springer Verlag, 1949, 1950.

H

1. HADAMARD J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press 1928.
2. HADAMARD J., Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Herman, Paris 1932.
3. HAYES W.D., BROWNE S.H., LEW R.J., Linearized Theory of Conical Supersonic Flow with Application to Triangular Wings. North. Amer. Aviation Rept. NA-46-818 (1946).
4. HAYES W.D., Reversed Flow Theorems in Supersonic Aerodynamics, Proc. VII-th Int. Cong. Appl. Mech., London, 2, 1948 ; Rep. N. Amer. Aviation Inc., no. AL-755 (1948).
5. HEASLET M.A., The Minimization of Wave Drag for Wings and Bodies with Given Base Area or Volume, NACA TN No. 3289 (1957).
6. HEASLET M.A., FULLER F.B., Drag minimization for Wings and Bodies in Supersonic Flow, NACA Report No. 1385 (1958).

7. HEASLET M.A., LOMAX H., Supersonic and Transonic Small Perturbation Theory, W.R. Sears Editor, Princeton, 1954.
8. HOFREITER N., voir [G.11], en coll. avec Gröbner W.
9. HOROVITZ B., voir [C.-6], en coll. avec Carafoli E.
10. HUMMEL D., Investigation on Vortex Breakdown on a Sharp-Edged Slender Delta Wing, Institut für Strömungsmechanik, Braunschweig, Rep. no. 64/24. et Jahrb. d. Wiss. Ges. Luft u. Raumf. 1964.

I

1. IACOB C., Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest, Editions de l'Académie de la R.P.R., Paris, Gauthier-Villars, 1959.
2. IACOB C., Cercetari asupra teoriei miscarilor conice, Bul. stiint. Acad. R.P.R. (Sectiunea de Stiinte matematice si fizice), VI, 3, 603 (1954). (Recherche sur la théorie des mouvements coniques).
3. IONESCU M., voir [C.- 7], en coll. avec Carafoli E.
4. IACOB C., Sur l'écoulement supersonique autour d'un obstacle conique de faible ouverture, Fluid, Dynamic Transactions, vol. 3 P.W.N. Warszawa (1967).

J

1. JONES J.P., The Breakdown of Vortices in Separated Flow, Univ. of Southampton Rep. I40, July 1960.
2. JONES R.T., The Minimum Drag of Thin Wings in Frictionless Flow, J.A.S., 18, 2 (1951).
3. JONES R.T., Theoretical Determination of the Minimum Drag at Supersonic Speeds, J.A.S., 19, 12 (1952).
4. JONES R.T., COHEN D., High-Speed Wing Theory, Princeton University Press, 1960.

K

1. KAINER J.H., Calculation of Optimum Supersonic Delta Wings, Convair Report No. ZA-259, 1957.
2. KAINER J.H., voir [Y.-1], en coll. avec Yoshihara H., Strand T.
3. VON KARMAN TH., The Problem of Resistance in Compressible Fluids, Galut Publ. 75 (1938).
4. VON KARMAN TH., MOORE B.N., Resistance of Stender Bodies Moving with Supersonic Velocities, with Special Reference to Projectiles, Trans. ASME (App. Mech.) 54, 303-310 (1932).
5. KOGAN M.N. O telch minimalnogo soprotivlenia v sverhzvukovom potoke gaza, Prikl. Math. i. Meh., XXI, 2 (1957).

L

1. LAGERSTROM P.A., Linearized Supersonic Theory of Conical Wings, NACA Technical Note 1658 (1948).
2. LAGERSTROM P.A., voir [G.-10], en coll. avec Graham M.E.
3. LANCE G.N., Some Problems of Supersonic Flight, Ph. D. Thesis University of London 1952.
4. LANCE G.N., The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream, Aeronaut. Quart, 5, 55-72 (1954).
5. LANCE G.N., The Lift of Twisted and Cambered Wings in Supersonic Flow, Aeronaut. Quart. 6, 149-63 (1955).
6. LAWRENCE H.R., voir [D.-4], en coll. avec Donovan A.F.
7. LEGENDRE R., Ecoulement au voisinage de la pointe avant d'une aile à forte flèche aux incidences moyennes, 8-me Congrès Int. de Méc. Appl., 1952, et R.A. 30 (1952) ; R.A., 31 (1953).
8. LEGENDRE R., Ecoulement supersonique autour d'une aile à bords d'attaque subsonique, Comptes rendus, Paris, 245, 889 (1957).
9. LEGENDRE R., Nappes en cornets aux bords d'attaque d'une aile en delta, R.A., 70, Mai 1959.
10. LEGENDRE R., Vortex Sheets from Leading Edges of Delta Wings, in Progress in Aeronautical Sciences, vol. 7, Pergamon Press.

11. LIEPMANN H.W., PUCKETT A.E., Introduction to the Aerodynamics of Compressible Fluids, New York, John Wiley and Sons, 1947.
12. LOMAX H., voir [H.-7], en coll. avec Heaslet M.A.
13. LOMAX H., HEASLET M.A., Generalized Conical Flow Fields in Supersonic Wing Theory, NACA T.N. no. 2497. September 1951.

M

1. MANGLER K.W., SMITH J.H., A Theory of Slender Delta Wing with Leading Edge Separation, R.A.E. Rep. 2442, April 1956.
2. MATEESCU DAN, voir [C.-8], en coll. avec Carafoli E.
3. MATEESCU D., voir [C.-17], en coll. avec Carafoli E., et Nastase Adriana.
4. MICHAEL W.H., voir [B.-3], en coll. avec Brown C.E.
5. MIELE A. The Calculus of Variations in Applied Aerodynamics and Flight Mechanics Academic Press 1962.
6. MIELE A. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, New York - London, Academic Press, 1965.
7. v. MISSES RICHARD, Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow, New York, Academic Press. Inc., Publishers, 1958.
8. MUNK M.M., The Minimum Induced Drag of Aerofoils, NACA Report N°.112, 1921.
9. MUNK M.M., The Reversal Theorem of Linearized Supersonic Airfoil Theory, J. Appl. Phys., 21, 159-161 (1950).
10. MURGULESCU ELENA, Problema la limita din teoria miscarilor conice in jurul aripiei subtiri de sectiune data, Comunicarile Acad. R.P.R., II, 9-10, 489-494 (1952). (Problèmes aux limites de la théorie des mouvements coniques autour de l'aile mince à section donnée!).
11. MURGULESCU ELENA, Miscarea supersonica in jurul aripiei delta cu fuzelaj conic, Bul. stin , Acad. R.P.R. (Sectia de st. mat. si fiz.), VI, 4, 741-753 (1954). (L'écoulement supersonique autour d'une aile delta, munie d'un fuselage conique).

1. NASTASE ADRIANA, Forme aerodinamice optime prin metoda variationala. Edit. Acad 1968 (Bucarest). (Formes Aerodynamiques optimales obtenues par la méthode variationnelle).
2. NASTASE ADRIANA, Asupra unor formule de recurenta referitoare la calculul vitezei axiale de perturbatie pentru miscarile omogene de ordin superior, St. cerc. de mec. apl., X, 1 (1959). (Sur certaines formules de récurrence concernant le calcul de la vitesse axiale de perturbation dans les mouvements homogènes d'ordre supérieur).
3. NASTASE ADRIANA, The Thin Cruciform Wing of Minimum Drag in Supersonic Flow, comunicată à Dresde, novembre 1964, RMA 5, 14, 1969, et SCMA, 5, 28, 1969.
4. NASTASE ADRIANA, About the Minimum Drag Problem of the Trapezoidal Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow, RMA, XIII, (1969), et SCMA, XX, 1, (1969).
5. NASTASE ADRIANA, The Minimum Drag Delta Wing in Moderate Hypersonic Flow, Comunicata la Conferinta de mecanica, sept. 1965, RMA 14, 2 (1969) et SCMA 28, 2 (1969).
6. NASTASE ADRIANA, The Thin Delta Wing, With Variable Geometry, Optimum for Two Supersonic Cruising Speeds, RMA, 14, 5 (1969) et SCMA : 8, 5 (1969).
7. NASTASE ADRIANA, The Thick Symmetrical Delta Wing, with Variable Geometry Optimum for two Supersonic Cruising Speeds, R.M.A. 3 XXI 1970.
8. NASTASE ADRIANA, voir [C.-9], en coll. avec Carafoli E.
9. NASTASE ADRIANA, voir [C.-10], en coll. avec Carafoli E.
10. NASTASE ADRIANA, voir [C.-11], en coll. avec Carafoli E.
11. NASTASE ADRIANA, voir [C.-12], en coll. avec Carafoli E.
12. NASTASE ADRIANA, voir [C.-13], en coll. avec Carafoli E.
13. NASTASE ADRIANA, voir [C.-14], en coll. avec Carafoli E.
14. NASTASE ADRIANA, voir [C.-15], en coll. avec Carafoli E.
15. NASTASE ADRIANA, voir [S.-3] , en coll. avec Savulescu St.
16. NASTASE ADRIANA, voir [C.-17] , en coll. avec Carafoli E. et Mateescu D.

P

1. PAI-SHIH-I., Introduction to the Theory of Compressible Flow. D. van Nostrand Company New York, 1959.
2. PATRAULEA N., Miscarea supersonica in jurul unei aripi care traverseaza un con circular, Bul. stiint. Acad. R.P.R., Sectia de stiinte tehnice si chimice, V, 1-4 (1953). (Ecoulement supersonique autour d'une aile qui traverse un cône circulaire).
3. POWERS S.A., Drag Minimization Using Exact Methods, AIAA Journal, 2, 5 (1964).
4. PUCKETT A.E., voir [L.-11], en coll. avec Liepmann H.W.

R

1. RODRIGUEZ A.M., LAGERSTROM P.A., GRAHAM E.W., Theorems Concerning the Drag Reduction of Wings of a Fixed Planform. J.A.S. 21, 1 (1964).
2. ROPER G.M., Drag Reduction of Thin Wings at Supersonic Speeds, by the Use of Camber and Twist ARC, RM N°.3132, 1952.
3. ROY M., Sur la théorie de l'aile delta, Tourbillons d'apex et nappes en cornets, C.R. Ac. Sc., Fév. 1957.

S

1. SAVULESCU ST., Tranzitia de la scurgerea laminara la cea turbulenta, Edit. Academiei, 1968. (Transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent).
2. SAVULESCU ST., Sur la détermination des caractéristiques de la couche limite par l'emploi de profils, types de vitesses et températures, RMA I, 2 (1957) et SCMA VIII, 2 (1957).
3. SAVULESCU ST., NASTASE ADRIANA, Theoretische Ableitung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils auf Grund des Minimums der Gesamtenergie der Schwankungen, Wissenschaftl. Zeitschr der T.U. Dresden Heft 4, 16 (1967).
4. SCHLICHTING H., Airfoil Theory at Supersonic Speed, Luftfahrtforschung 13, 1936, et Janrbuch Deutscher Luftfahrtforschung, 1937.

5. SEARS W.R., (editor) General Theory of High Speed Aerodynamics, Princeton University Press, Princeton 1955.
6. SEARS W.R., Small Perturbation Theory, Princeton University Press, Princeton 1960.
7. SHMIGLEVSKII I.U.D., Some Variational Problems of Gas Dynamics (in Russian), VTAN Moskva 1963.
8. SHMIGLEVSKII I.U.D., voir [B- 2], en coll. avec Borisov V.M.
9. SPREITER J.R., The Aerodynamic Forces on Slender Plane -and Cruciform Wing and Body Combinations. NACA Rept. 962, 1950.
10. STAIU ST., voir [C.-16], en coll. avec Carafoli E.
11. STANCIL R.T., Comments of the Lagrangian Multipliers in Drag Minimization J.A.S. 24, 5 (1957).
12. STRAND T., Minimum Drag Due to Lift for a Delta Wing with Sonic Leading Edges, California Institute of Technology, 1954.
13. STRAND T., Minimum Wing Wave Drag with Volume Constraint J.A.S., 27, (1960).

T

1. TSIEN H.S., The Supersonic Conical Wing of Minimum Drag, J.A.S., 22, (1955).

V

1. VALLEE D., voir [F.-2], en coll. avec Fenain M.
2. VALLEE D., voir [F.-3], en coll. avec Fenain M.
3. VALLEE D., voir [G.-3], en coll. avec Germain P.
4. VALLEE GUIRAUD D., voir [F -5], en coll. avec Fenain M.

W

1. WARD G.N., On the Minimum Drag of Thin. Lifting Bodies in Steady Supersonic Flows, ARC Report No. 18711, 1956.
2. WEBER J., Some Effects of Flow Separation on Slender Delta Wings, ARC 18, 73, November 1955.

8. WERLE H., Sur l'écoulement des tourbillons à l'apex d'une aile delta aux faibles vitesses, R.A., 74 (1960).

Y

1. YOSHIHARA H., KAINER J.A., STRAND T., On Optimum Thin Lifting Surface at Supersonic Speeds, I.A.S. 25, 8 (1958).

Z

1. ZHIGULEV V.N., ZHILIN I.U. L., On bodies of Minimum Drag, P.M.M., 23, 6 (1959).
2. ZHILIN I.U.L., Wings of Minimum Drag, P.M.M., 21, 2 (1957).
3. ZHILIN I.U.L., voir [Z-1], en coll. avec Zhigulev V.N.

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

SAINT BERNARD - PARIS V

DÉPARTEMENT DE LA SCOLARITÉ

Enseignements du 3^e Cycle

336-25-25 - P

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'UNIVERSITÉ

THESE DE :

Nom : Melle NASTASE

Prénoms : Adriana

Né (e) le 4 Septembre 1944 à GALATI Dép^t Roumanie

SUJETS

1^{ère} THESE : " Contribution à l'étude des formes aérodynamiques optimales.

2^e THESE (Propositions faites par la Faculté) :

" Problème de Poincaré. Stekloff (détermination des vitesses en fonction des tourbillons)."

Vu et approuvé

Paris, le 13 Avril 1970

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

Vu et permis d'imprimer

Paris, le

Le Recteur de l'Académie
de Paris



Ch. Poincaré

